ΜΙΧΑΛΗ ΚΑΡΑΜΑΥΡΟΥ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ



- ΘΕΩΡΙΑ
- ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ
- ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
- ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1993

ΜΙΧΑΛΗ ΚΑΡΑΜΑΥΡΟΥ

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ - ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΦΟΙΤΗΤΗΣ Μ.Π.Ι.

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1993

Σε κάθε γνήσιο αντίτυπο υπογράφει ο συγγραφέας

● Το βιβλίο από γράφτηκε με πολύ κόπο και επιτρέπεται η αντιγραφή των θεμάτων του από άλλο συνάδελφο μόνο ύστερα από γραπτή άδεια του συγγραφέα.

© Copyright 1993 Μιχάλης Καραμαύρος
ΤΗΛ. (031) 270 390

Επιμέλεια σχημάτων & Εξωφύλλου : Θεόδωρος Αβραμίδης

Φωτοστοιχειοθεσία

SCIENCE - PRESS

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ
Ε. ΚΑΜΠΙΤΣΗ - Μ. ΑΒΡΑΜΙΔΟΥ
ΚΑΜΒΟΥΝΙΩΝ 5 - ΤΗΛ. 031 / 262 062
546 21 ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Τα βιβλία του συγγραφέα κυκλοφορούν σ' όλα τα βιβλιοπωλεία. Για τους καθηγητές κυκλοφορεί ειδικό βοήθημα δωρεάν. Για οποιαδήποτε πληροφορία απευθυνθείτε στον ίδιο , στα τηλέφωνα 270 390 ή 457 528 ή γράψτε στις διευθύνσεις Φροντιστήρια Διαγώνιος Μητροπόλεως 105 Τ.Κ 54 622. ή Χαλδίας 98 Τ.Κ 55 133 Θεσ/νίκη.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο ολοκληρωτικός λογισμός αποτελεί το αντικείμενο διαπραγμάτευσης αυτού του βιβλίου.

Βάση για τη συγγραφή του αποτελεί βέβαια το σχολικό εγχειρίδιο. Εκτίθεται ωστόσο με τρόπο μεθοδικό και η θεωρία την οποία πλαισιώνουν:

- Παρατηρήσεις.
- Λυμένες εφαρμογές.
- Μεθοδικά λυμένα θέματα.
- Ασκήσεις με υπόδειξη για την εφαρμογή συγκεκριμένης τεχνικής στους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.
- Άλυτες πρωτότυπες ασκήσεις.

Η όλη αυτή εργασία καρπός επίπονης αναζήτησης και διδακτικής προσπάθειας καλύπτει πλήρως τις ανάγκες του υποψηφίου.

Αποτελεί μια γόνιμη μέθοδο αφομοίωσης της σχολικής ύλης, αλλά συγχρόνως μια αφετηρία για αυτενέργεια.

Ευελπιστώ επίσης ότι θα αποτελέσει ένα πολύτιμο βοηθό για τους συναδέλφους μαθηματικούς αφού θα βρουν σ' αυτό ασκήσεις - μέσα από τις πολλές - που κατά τη δική τους γνώμη πρέπει να διδάξουν στους μαθητές τους.

Από τη θέση αυτή επιθυμώ να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν για την έκδοση αυτού του βιβλίου και ιδιαίτερα τον συνάδελφο μαθηματικό κ. Νίκο Ζανταρίδη για τις χρήσιμες υποδείξεις του και τη συμβολή του στην διόρθωση των δοκιμίων.

Ο συγγραφέας

Απρίλιος 93 Θεσσαλονίκη

Μιχάλης Καραμαύρος

Υ. Γ. Κάθε φιλική συμβουλή η οποία θα στοχεύει στην βελτίωση αυτού του πονήματος είναι ευπρόσδεκτη.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ιστορικά, το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός επίπεδου σχήματος, το οποίο πρώτος ο Αρχιμήδης (287 - 212 π.χ.) έλυσε στις μερικές περιπτώσεις του κύκλου και του παραβολικού τομέα, ήταν η αιτία της δημιουργίας του κλάδου των Μαθηματικών που λέγεται Ολοκληρωτικός Λογισμός.

Ο Αρχιμήδης υπολόγισε τέτοια εμβαδά με μια μέθοδο που αποδίδεται σε έναν άλλον Έλληνα Μαθηματικό, τον Εύδοξο (408 - 355 π.χ.) και είναι γνωστή ως " Μέθοδος της εξάντλησης ".

Για ιστορικούς πάλι λόγους αναφέρουμε ότι για τον Αρχιμήδη ήταν δεδομένο ότι το εμβαδόν ενός επίπεδου σχήματος υπάρχει και η προσπάθειά του απέβλεπε μόνο στον υπολογισμό και όχι στον ορισμό του εμβαδού.

Στο διάστημα που μεσολάβησε από την Αρχαιότητα μέχρι και τις αρχές του 17ου αιώνα υπολογίστηκαν με επιτυχία με βάση τη μέθοδο της εξάντλησης τα εμβαδά πολλών σχημάτων.

Η μεγάλη επιτυχία του ολοκληρωτικού λογισμού είναι ότι με τη βοήθεια του μπορούμε να δώσουμε πλέον θεωρητικά τον ορισμό του εμβαδού ενός επίπεδου χωρίου, καθώς επίσης να υπολογίσουμε και άλλα μεγέθη όπως π.χ. το έργο μιας δύναμης, ο όγκος ενός στερεού κ.τ.λ.

● *Συμβολισμός Σ (σίγμα)*

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη μας θα υπενθυμίσουμε το σύμβολο Σ με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να γράψουμε με συντομία αθροίσματα πραγματικών αριθμών όταν το πλήθος των προσθετέων είναι μεγάλο.

● Το σύμβολο $\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ διαβάζεται **" άθροισμα των αριθμών α_k, από k = 1 έως k = ν "** και παριστάνει το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu$ δηλαδή έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$$

Οι γνωστές ιδιότητες των πεπερασμένων αθροισμάτων

i) $\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + ... + \lambda\alpha_\nu = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu)$

ii) $(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + ... + (\alpha_\nu + \beta_\nu) = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu) + (\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_\nu)$

με τη χρήση του συμβόλου Σ γράφονται αντιστοίχως:

$$\text{i)}\ \sum_{k=1}^{\nu} (\lambda\alpha_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \qquad \text{ii)}\ \sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_k + \beta_k) = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k + \sum_{k=1}^{\nu} \beta_k$$

- Στην ειδική περίπτωση που έχουμε

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu = \alpha \quad \text{τότε} \quad \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha = \alpha + \alpha + ... + \alpha = \nu\alpha$$

Παρατήρηση

Στα επόμενα θεωρούμε γνωστά τα αθροίσματα

- $S_1 = 1 + 2 + ... + \nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}, \quad \nu \in N^*$

- $S_2 = 1^2 + 2^2 + ... + \nu^2 = \dfrac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1), \quad \nu \in N^*$

- $S_3 = 1^3 + 2^3 + ... + \nu^3 = \dfrac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}, \quad \nu \in N^*$

- Το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου (α_ν)

$$S_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2} \cdot \nu = \frac{1}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\,\nu$$

- Το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου (α_ν)

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}, \ \lambda \in N^*$$

1.2 Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Έστω το κλειστό διάστημα [α, β]. Ονομάζουμε **διαμέριση του διαστήματος [α, β]** κάθε πεπερασμένο σύνολο σημείων $\{x_0, x_1, \ldots x_\nu\}$ του [α, β] για το οποίο ισχύουν:

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$$

και τη συμβολίζουμε με

$$\mathbf{P_\nu : \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta}$$

Δύο διαμερίσεις P_ν και P'_ν του [α, β] είναι διαφορετικές όταν για τα σύνολα $A = \{x_0, x_1, \ldots x_\nu\}$ και $B = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_\nu\}$ ισχύει $x_i \neq x'_i$ για κάποιο δείκτη i, (ή ακόμη, προφανώς, όταν διαφέρουν στο πλήθος των στοιχείων τους).

Με τη διαμέριση P_ν του [α, β] έχουμε χωρίσει το διάστημα [α, β] σε ν υποδιαστήματα της μορφής $\delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ με μήκος $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots \nu$. Τα διαστήματα $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ δεν έχουν υποχρεωτικά το ίδιο μήκος.

Στη μελέτη που ακολουθεί θα χρησιμοποιούμε συνήθως διαμερίσεις P_ν με ισομήκη υποδιαστήματα, για τα οποία ισχύει:

$$\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{\beta - \alpha}{\nu}, \quad k = 1, 2, \ldots \nu$$

Έστω τώρα μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και $P_\nu : \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$ μια διαμέριση του [α, b].

Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β] είναι συνεχής και σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα $[x_k, x_{k-1}]$, $k = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ του [α, β].

Συνεπώς σε κάθε υποδιάστημα δ_k του [α,β] υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία ε_k και μ_k στα οποία η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της $f(\varepsilon_k)$ και τη μέγιστη τιμή της $f(\mu_k)$

Κατόπιν αυτών

Ονομάζουμε

- **Ανώτερο άθροισμα της f στο διάστημα [α, β] για τη διαμέριση P_ν το άθροισμα**

$$\mathbf{S_\nu = f(\mu_1)\Delta x + f(\mu_2)\Delta x + \ldots + f(\mu_\nu)\Delta x = \sum_{k=1}^{\nu} f(\mu_k)\Delta x}$$

- **κατώτερο άθροισμα της f στο διάστημα [α, β] για τη διαμέριση P_ν το άθροισμα**

$$\mathbf{s_\nu = f(\varepsilon_1)\Delta x + f(\varepsilon_2)\Delta x + \ldots + f(\varepsilon_\nu)\Delta x = \sum_{k=1}^{\nu} f(\varepsilon_k)\Delta x}$$

Με τον τρόπο αυτό ορίζουμε δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών:

- Την ακολουθία των κατωτέρων αθροισμάτων (s_ν), $\nu \in N^*$ και

- Την ακολουθία των ανωτέρων αθροισμάτων (S_ν), $\nu \in N^*$.

Για τις ακολουθίες αυτές ισχύει:

$$s_\nu \leq S_\nu \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

αφού για κάθε k =1, 2, ... ν είναι

$$f(\varepsilon_k)\,\Delta x \leq f(\mu_k)\,\Delta x$$

- Για τις ακολουθίες αυτές ισχύει η πρόταση που ακολουθεί και της οποίας η απόδειξη παραλείπεται.

Πρόταση 1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] τότε οι ακολουθίες (s_ν) και (S_ν) συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό L, δηλαδή ισχύει: $\lim\limits_{\nu \to +\infty} S_\nu = \lim\limits_{\nu \to +\infty} s_\nu = L$

Παρατήρηση

- Αποδεικνύεται ότι η πρόταση ισχύει και για κάθε άλλη ακολουθία διαμερίσεων του [α, β] στις οποίες τα υποδιαστήματα δ_k δεν είναι ισομήκη, αρκεί το μέγιστο από τα μήκη Δx_k να έχει όριο το μηδέν, όταν το ν τείνει στο +∞.

Με τη βοήθεια της παραπάνω πρότασης δίνουμε τον ορισμό.

Ορισμός

Ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο [α, β] το κοινό όριο των ακολουθιών (S_ν) και (s_ν). Το όριο αυτό το συμβολίζουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

και διαβάζουμε " ολοκλήρωμα της f από α έως β ".

Έχουμε λοιπόν την οριακή σχέση

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu \to \infty} S_\nu = \lim_{\nu \to \infty} s_\nu = L$$

- Η συνάρτηση f λέγεται **ολοκληρώσιμη στο [α, β]**.
- Οι αριθμοί α και β λέγονται **όρια της ολοκλήρωσης.**
- Το σύμβολο $\int$ προέρχεται από το γράμμα s, αρχικό της λέξης Summa και καθιερώθηκε από τον Leibniz που το χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το 1675. Ο Euler χρησιμοποιούσε το Ελληνικό Σ.
- Το διάστημα [α, β] λέγεται **διάστημα ολοκλήρωσης.**

- Άμεση συνέπεια της πρότασης 1 είναι ότι:

Κάθε συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] είναι ολοκληρώσιμη σε αυτό.

- Η μεγάλη πρακτική σημασία του ορισμένου ολοκληρώματος βρίσκεται στο ότι υπάρχουν πολλές κλάσεις συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες: π.χ. οι φραγμένες, κλιμακωτές κ.τ.λ.

Επισημαίνουμε λοιπόν ότι:

- Μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής.

- Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, που εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση f και το διάστημα [α, β]. Για το λόγο αυτό τα ολοκληρώματα

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\ ,\quad \int_\alpha^\beta f(t)dt\ ,\quad \int_\alpha^\beta f(y)dy$$

παριστάνουν τον ίδιο πραγματικό αριθμό δηλαδή ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{f(x)dx} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f(t)dt} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f(y)dy} = \ldots\ldots$$

- Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, όπως ορίστηκε, προϋποθέτει ότι $\alpha < \beta$.

Επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος και στην περίπτωση που είναι $\alpha \geq \beta$ ως εξής:

Αν $\alpha = \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$

Αν $\alpha > \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$

• Το άθροισμα Riemann για μια συνάρτηση f.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο [α, β] , μια διαμέριση

$P_\nu : \alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = \beta$ με $\Delta x = x_k - x_{k-1} = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$, k = 1, 2, ..., ν

και $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_\nu$ οποιαδήποτε σημεία του [α, β] με $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$, k =1, 2, 3.....ν



Ονομάζουμε **άθροισμα Riemann της f στο [α, β], το άθροισμα**

$$R_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x$$

● Το σύνολο $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu\}$ με $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ ονομάζεται σύνολο **ενδιάμεσων σημείων** της διαμέρισης P_ν.

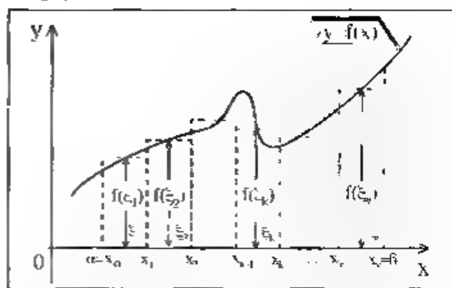
Για μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] προφανώς ισχύουν

$f(\varepsilon_k) \le f(\xi_k) \le f(\mu_k)$ $k = 1, 2, \ldots, \nu$ οπότε επειδή $\Delta x > 0$

$f(\varepsilon_k)\Delta x \le f(\xi_k)\Delta x \le f(\mu_k)\Delta x$ $k = 1, 2, \ldots, \nu$

άρα θα έχουμε: $\sum_{k=1}^{\nu} f(\varepsilon_k)\Delta x \le \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x \le \sum_{k=1}^{\nu} f(\mu_k)\Delta x$

δηλαδή: $s_\nu \le R_\nu \le S_\nu$



Είναι γνωστό όμως (πρόταση 1) ότι οι ακολουθίες s_ν και S_ν έχουν κοινό όριο τον πραγματικό αριθμό

$$I = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

συνεπώς θα είναι και $\lim_{\nu \to +\infty} R_\nu = \int_\alpha^\beta f(x)dx$. Έχουμε δηλαδή την πρόταση:

Πρόταση **Για μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [α, β] ισχύει:**

$$\lim_{\nu \to +\infty} R_\nu = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Παρατηρήσεις

● Το ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το α έως το β ονομάζεται και **ολοκλήρωμα Riemann της f στο διάστημα [α, β]** η δε συνάρτηση f λέγεται και **ολοκληρώσιμη** κατά Riemann στο [α, β].

● Από τα όσα προαναφέραμε, γίνεται φανερό ότι για μια συνεχή συνάρτηση f το

$$\lim_{\nu \to +\infty} R_\nu = \lim_{\nu \to +\infty} \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x$$

είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ σε κάθε διαμέριση P_ν.

Για τον λόγο αυτό όταν θέλουμε να βρούμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης στο διάστημα [α, β] εκλέγουμε τον τρόπο διαμέρισης και τα σημεία ξ_k έτσι ώστε να είναι πρακτικά εύκολος ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{\nu \to +\infty} \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x$

● Ας δούμε τώρα τη διαδικασία που ακολουθούμε για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος Riemann μιας συνεχους συνάρτησης f στο διαστημα [α, β].

Πρόβλημα

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α, β]. Ζητείται ο υπολογισμός του $\int_\alpha^\beta f(x)dx$

ΛΥΣΗ

Βήμα 1ο

Χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ισομήκη υποδιαστήματα για τα οποία ισχύει:

$$\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{\beta - \alpha}{\nu}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \nu$$

Βημα 2ο

Επιλεγουμε ως ξ_k συνήθως τα άκρα των υποδιαστημάτων $[x_{k-1}, x_k]$. Ετσι αν επιλεγουμε ως ξ_k τα δεξιά άκρα έχουμε:

$$\xi_k = \alpha + k\frac{\beta - \alpha}{\nu}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \nu \quad \text{οπότε}$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} f\left(\alpha + k\frac{\beta - \alpha}{\nu}\right)\right] \quad (1)$$

Στην περίπτωση που θα επιλέξουμε ως ξ_k τα αριστερα ακρα των υποδιαστηματων εχουμε:

$$\xi_k = \alpha + (k-1)\frac{\beta - \alpha}{\nu}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \nu$$

και ισχυει αντίστοιχος τυπος οπως ο τύπος (1) .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Να αποδειχθεί ότι $\int_\alpha^\beta c\,dx = c(\beta - \alpha)$.

ΛΥΣΗ

i) Αν α = β, η ισότητα είναι προφανής.

ii) Αν α < β, τότε επειδή η f(x) = c είναι συνεχης στο [α, β] , συμφωνα με την προταση (2) και το προηγούμενο πρόβλημα έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta c\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu \to +\infty}\left[\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x\right] = \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} c\right] =$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu} \cdot \nu c\right] = c(\beta - \alpha)$$

iii) Αν $\alpha > \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta c dx = -\int_\beta^\alpha c dx = -c(\alpha - \beta) = c(\beta - \alpha)$

Ειδικότερα αν $c = 0$, τότε $\int_\alpha^\beta 0\, dx = 0$.

Εφαρμογή 2

Να αποδειχθεί ότι $\int_\alpha^\beta x dx = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.

ΛΥΣΗ

i) Αν η $\alpha = \beta$ η ισότητα ειναι προφανής.

ii) Αν $\alpha < \beta$ τότε επειδή η συναρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ συμφωνα με τον τυπο (1) έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta x dx = \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} f\left(\alpha + k\frac{\beta - \alpha}{\nu}\right)\right] = \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\left(\alpha + k\frac{\beta - \alpha}{\nu}\right)\right] =$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu}\left(\sum_{k=1}^{\nu}\alpha + \frac{\beta - \alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} k\right)\right] =$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu}\left(\nu\alpha + \frac{\beta - \alpha}{\nu}\cdot\frac{\nu(\nu + 1)}{2}\right)\right] = (\beta - \alpha)\,\alpha + \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$$

iii) Αν $\alpha > \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta x dx = -\int_\beta^\alpha x dx = -\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\right) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$

Εφαρμογή 3

Να αποδειχθεί ότι $\int_\alpha^\beta 2x dx = \beta^2 - \alpha^2$.

ΛΥΣΗ

i) Αν $\alpha = \beta$ η ισότητα είναι προφανής.

ii) Αν $\alpha < \beta$, τότε επειδη η συνάρτηση $f(x) = 2x$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ συμφωνα με τον τύπο (1) εχουμε:

$$\int_\alpha^\beta 2x dx = \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} f\left(\alpha + k\frac{\beta - \alpha}{\nu}\right)\right] = \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} 2\left(\alpha + k\frac{\beta - \alpha}{\nu}\right)\right] =$$

$$\lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu}\left(2\sum_{k=1}^{\nu}\alpha + 2\frac{\beta - \alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} k\right)\right] =$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\beta - \alpha}{\nu}\left(2\nu\alpha + 2\,\frac{\beta - \alpha}{\nu}\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)\right] = 2(\beta - \alpha)\alpha + (\beta - \alpha)^2 = \beta^2 - \alpha^2$$

iii) Αν $\alpha > \beta$ τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} 2x dx = -\int_{\beta}^{\alpha} 2x dx = -\left(\alpha^2 - \beta^2\right) = \beta^2 - \alpha^2$

Εφαρμογή 4

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^{\alpha} x^2 dx = \frac{\alpha^3}{3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

i) Αν $\alpha = 0$ η ισότητα ειναι προφανής.

ii) Αν $\alpha > 0$, τότε επειδή η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ συμφωνα με τον τυπο (1) έχουμε:

$$\int_0^{\alpha} x^2 dx = \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} f\left(k\frac{\alpha}{\nu}\right)\right] = \lim_{\nu \to +\infty}\left[\frac{\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} k^2\frac{\alpha^2}{\nu^2}\right]$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty}\frac{\alpha^3}{\nu^3}\sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \lim_{\nu \to +\infty}\frac{\alpha^3}{\nu^3}\,\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{\alpha^3}{3}$$

iii) Αν $\alpha < 0$, τότε $\int_0^{\alpha} x^2 dx = -\int_{\alpha}^{0} x^2 dx$

Είναι $\int_{\alpha}^{0} x^2 dx = \lim_{\nu \to +\infty}\left[-\frac{\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} f\left(\alpha - k\frac{\alpha}{\nu}\right)\right] = -\frac{\alpha^3}{3}$

Επομένως

$$\int_0^{\alpha} x^2 dx = -\int_{\alpha}^{0} x^2 dx = -\left(-\frac{\alpha^3}{3}\right) = \frac{\alpha^3}{3}$$

Εφαρμογή 5

Έστω μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, b]$ με την ιδιοτητα: Για καθε υποδιάστημα $(x', x'') \subseteq [\alpha, b]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x', x'')$ με $f(\xi) = 2\xi$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\alpha}^{b} f(x) dx = b^2 - \alpha^2$$

ΛΥΣΗ

Έστω $P_\nu : \alpha = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = b$ μια διαμέριση του $[\alpha, b]$. Τοτε για κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi_k) = 2\xi_k$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$.

Η ακολουθία Riemann είναι τότε:

$$R_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{\nu} 2\xi_k(x_k - x_{k-1}) \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2x$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Για την παραπάνω διαμέριση P_ν του $[\alpha, \beta]$ και για την ίδια επιλογή των ξ_k έχουμε:

$$\int_\alpha^b g(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{k=1}^{\nu} g(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\nu\to+\infty}\sum_{k=1}^{\nu} 2\xi_k(x_k - x_{k-1})$$

Συνεπώς από την (1) έχουμε : $\int_\alpha^b g(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty} R_\nu = \int_\alpha^b f(x)dx$

Είναι γνωστό όμως ότι $\int_\alpha^b g(x)dx = b^2 - \alpha^2$ (εφαρμογή 3)

Άρα $\int_\alpha^b f(x)dx = b^2 - \alpha^2$.

Εφαρμογή 6

Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, b]$ με την ιδιότητα: Σε κάθε υποδιάστημα (x', x'') του $[\alpha, b]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi \in (x', x'')$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi) = \lambda$ όπου λ σταθερός πραγματικός. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_\alpha^b f(x)dx = \lambda(\beta - \alpha)$$

ΛΥΣΗ

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, b]$ σε ισομήκη υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$ για τα οποία ισχύει:

$$\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-\alpha}{\nu}, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu$$

Σύμφωνα με την υπόθεση σε κάθε διάστημα $[x_k, x_{k-1}]$ υπάρχει $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ με $f(\xi_k) = \lambda$

Έχουμε τώρα $\int_\alpha^b f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{b-\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\right]$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}\left[\frac{b-\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\lambda\right] = \lim\frac{b-\alpha}{\nu}\lambda\nu = \lambda(b-\alpha)$$

Εφαρμογή 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_\alpha^b \text{συν}x\,dx = \text{ημ}b - \text{ημ}\alpha \qquad ([\alpha, b] \subseteq \mathbb{R})$$

ΛΥΣΗ

Εστω $P_\nu : \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_{\nu-1} < x_\nu = b$ μια διαμέριση του $[\alpha, b]$ με την οποία χωρίζουμε το διάστημα αυτό σε ν ίσα υποδιαστήματα της μορφής

$$\delta_k = [x_{k-1}, x_k] \quad \text{μήκους} \quad \Delta x = \frac{b-\alpha}{\nu}$$

Επιλέγουμε ως ξ_k τα δεξιά άκρα αυτών των διαστημάτων. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = ημx$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα της μεσης τιμής του διαφορικού λογισμου θα εχουμε:

$$\frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = g'(\theta_k) \quad \text{όπου} \quad \theta_k \in (x_{k-1}, x_k)$$

η $ημx_k - ημx_{k-1} = \Delta x \cdot συν\theta_k$, $k = 1, 2, 3, ..., \nu$ (1)

Η ακολουθία Riemann για την f είναι:

$$R_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} συν\xi_k \, \Delta x = \sum_{k=1}^{\nu} [συν\theta_k + (συν\xi_k - συν\theta_k)] \, \Delta x =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} συν\theta_k \, \Delta x + \sum_{k=1}^{\nu} (συν\xi_k - συν\theta_k) \, \Delta x \qquad (2)$$

Ειναι $\sum_{k=1}^{\nu} συν\theta_k \, \Delta x = συν\theta_1 \, \Delta x + συν\theta_2 \, \Delta x + \dots + συν\theta_k \, \Delta x$ και λόγω της (1) ειναι

$$\sum_{k=1}^{\nu} συν\theta_k \, \Delta x = (ημx_1 - ημx_0) + (ημx_2 - ημx_1) + \dots + (ημx_\nu - ημx_{\nu-1}) =$$

$$ημx_\nu - ημx_0 = ημb - ημ\alpha \qquad (3)$$

Συμφωνα με το θεωρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $f(x) = συνx$ σε κάθε υποδιάστημα $[\theta_k, \xi_k]$ $k = 1, 2, ..., \nu$.

(Είναι $\theta_k < \xi_k$ γιατί έχουμε επιλέξει ξ_k δεξιό άκρο των διαστημάτων $[x_{k-1}, x_k]$ και $\theta_k \in (x_{k-1}, x_k)$). Θα έχουμε :

$$\frac{f(\xi_k) - f(\theta_k)}{\xi_k - \theta_k} = f'(t_k) \quad \text{όπου} \quad t_k \in (\theta_k, \xi_k), \quad k = 1, 2, ..., \nu$$

ή $συν\xi_k - συν\theta_k = -(\xi_k - \theta_k)\, ημt_k$ και

συνεπως $|συν\xi_k - συν\theta_k| = |\xi_k - \theta_k| \, |ημt_k| \leq |\xi_k - \theta_k| < \Delta x = \frac{b-\alpha}{\nu}$

Εχουμε τωρα $\sum_{k=1}^{\nu} (συν\xi_k - συν\theta_k) \, \Delta x \leq \sum_{k=1}^{\nu} |συν\xi_k - συν\theta_k| \, \Delta x$ ή

$$\sum_{k=1}^{\nu} (συν\xi_k - συν\theta_k) \, \Delta x < \frac{b-\alpha}{\nu} \cdot \sum_{k=1}^{\nu} \Delta x = \frac{b-\alpha}{\nu} \cdot \frac{b-\alpha}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} 1 = \frac{(b-\alpha)^2}{\nu^2} \cdot \nu = \frac{(b-\alpha)^2}{\nu}$$

και επειδή $\lim_{\nu \to +\infty} \frac{(b - \alpha)^2}{\nu} = 0$ θα είναι και

$$\lim_{\nu \to +\infty} \sum_{k=1}^{\nu} (\sigma\upsilon\nu\xi_k - \sigma\upsilon\nu\theta_k)\,\Delta x = 0 \qquad (4)$$

Η ακολουθία Riemann από την (3) γράφεται

$$R_\nu = \eta\mu b \quad \eta\mu\alpha + \sum_{k\ \ 1}^{\nu} (\sigma\upsilon\nu\xi_k \quad \sigma\upsilon\nu\theta_k)\,\Delta x$$ και λόγω της (4) έχουμε

$$\lim_{\nu \to +\infty} R_\nu \quad \eta\mu b \quad \eta\mu\alpha \quad \text{άρα} \quad \int_\alpha^b \sigma\upsilon\nu x dx \quad \eta\mu b \quad \eta\mu\alpha.$$

Παρατήρηση

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$\int_\alpha^b \eta\mu x dx \;=\; \sigma\upsilon\nu\alpha \quad \sigma\upsilon\nu b.$$

Εφαρμογή 8

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \eta\mu x dx$ αν είναι γνωστό ότι

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha + \ldots + \eta\mu(\nu\alpha) = \frac{\eta\mu\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\alpha \cdot \eta\mu\frac{\nu\alpha}{2}}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}$$

ΛΥΣΗ

Η συναρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι συνεχής στο διαστημα $[0, \pi]$. Έστω P_ν μια διαμέριση του $[0, \pi]$ σε ν ισομήκη διαστήματα της μορφής $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ με $x_0 = 0$ και $x_\nu = \pi$.

Το μήκος των διαστημάτων αυτών είναι $\frac{\pi \quad 0}{\nu} = \frac{\pi}{\nu}$ και αν επιλέξουμε ως ξ_k τα δεξια ακρα έχουμε: $\xi_k \quad k\frac{\pi}{\nu}$. Εχουμε λοιπόν

$$R_\nu \quad \frac{\pi}{\nu}\sum_{k\ \ 1}^{\nu} f(\xi_k) = \frac{\pi}{\nu}\sum_{k\ \ 1}^{\nu} \eta\mu\frac{k\pi}{\nu} \quad \text{ή}$$

$$R_\nu \quad \frac{\pi}{\nu}\left(\eta\mu\frac{\pi}{\nu} + \eta\mu\frac{2\pi}{\nu} + \cdots + \eta\mu\frac{\nu\pi}{\nu}\right) \quad \text{ή}$$

$$R_\nu = \frac{\pi}{\nu}\,\frac{\eta\mu\frac{(\nu+1)\pi}{2\nu}\,\eta\mu\left(\nu\frac{\pi}{2\nu}\right)}{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}} = \frac{\pi}{\nu}\,\frac{\eta\mu\left(\frac{\nu+1}{2\nu}\pi\right)}{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}} = 2\,\frac{\eta\mu\left(\frac{\nu+1}{2\nu}\pi\right)}{\frac{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}}{\frac{\pi}{2\nu}}}$$

και επειδή $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \eta\mu\left(\frac{\nu+1}{2\nu}\pi\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$

και $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{\eta\mu\frac{\pi}{2\nu}}{\frac{\pi}{2\nu}} = 1$ θα είναι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} R_\nu = 2$

Αρα $\int_0^\pi \eta\mu x dx = 2$

Εφαρμογή 9

Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^b e^x dx = e^b - e^\alpha$, $\alpha < b$.

ΛΥΣΗ

1ος τροπος

Η συναρτηση $f(x) = e^x$ ειναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, b]$.
Εστω $P_\nu : \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{\nu-1} < x_\nu = b$ μια διαμέριση του $[\alpha, b]$ σε ισα υποδιαστήματα της μορφής $[x_{k-1}, x_k]$ $k = 1, 2, \ldots, \nu$ μήκους $\Delta x = \frac{b-\alpha}{\nu}$.

Επιλέγουμε ως ξ_k τα δεξιά άκρα των υποδιαστημάτων.
Η ακολουθια Riemann είναι:

$$R_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{\nu} e^{\xi_k}\,\Delta x$$

Η συναρτηση $f(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμου σε καθενα υποδιάστημα θα ισχύει:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(c_k) \text{ οπου } c_k \in (x_{k-1}, x_k)$$

$$\text{ή } e^{x_k} - e^{x_{k-1}} = e^{c_k}\Delta x\ , \quad k = 1, 2, \ldots, \nu \qquad (1)$$

Η ακολουθια Rν γράφεται:

$$R_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} e^{c_k} + \left[\left(e^{\xi_k} - e^{c_k}\right)\right]\Delta x = \sum_{k=1}^{\nu} e^{c_k}\Delta x + \sum_{k=1}^{\nu}\left(e^{\xi_k} - e^{c_k}\right)\Delta x$$

Λόγω της (1) είναι :

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{c_k}\Delta x = \sum_{k=1}^{\nu}\left(e^{x_k}-e^{x_{k-1}}\right) = \left(e^{x_1}-e^{\alpha}\right)+\left(e^{x_2}-e^{x_1}\right)+\dots+\left(e^{b}-e^{x_{\nu-1}}\right) = e^b-e^\alpha$$

Εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f(x)=e^x$ σε κάθε υποδιάστημα $[c_k, \xi_k]$ θα έχουμε :

$$e^{\xi_k}-e^{c_k} = (\xi_k-c_k)\,e^{t_k} \quad \text{όπου } t_k\in(c_k,\xi_k),\ \ k=1,2,\dots,\nu$$

Είναι : $\left|e^{\xi_k}-e^{c_k}\right| = \left|\xi_k-c_k\right|\left|e^{t_k}\right| < \left|\xi_k-c_k\right| e^b \le \Delta x e^b$ (3)

(για $[c_k, \xi_k]\subseteq[x_{k-1}, x_k]$ και $t_k<b$)

Συνεπώς λόγω της (3) έχουμε :

$$\left|\Delta x\sum_{k=1}^{\nu}\left(e^{\xi_k}-e^{c_k}\right)\right| < \Delta x\sum_{k=1}^{\nu}e^b\Delta x = \Delta x\cdot\Delta x\cdot\sum_{k=1}^{\nu}e^b =$$

$$= \frac{b-\alpha}{\nu}\cdot\frac{b-\alpha}{\nu}\cdot\nu e^b = \frac{(b-\alpha)}{\nu}e^b$$

και επειδή $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{b-\alpha}{\nu}\cdot e^b=0$ θα έχουμε $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\Delta x\sum_{k=1}^{\nu}\left(e^{\xi_k}-e^{c_k}\right)=0$.

Επομένως η ακολουθία Riemann θα έχει όριο:

$$\lim_{\nu\to+\infty}R_\nu = e^b-e^\alpha \quad \text{και άρα} \quad \int_\alpha^b e^x dx = e^b-e^\alpha .$$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη διαμέριση P_ν του $[\alpha, \beta]$ η οποία το χωρίζει σε ν υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\frac{b-\alpha}{\nu}$ και επιλέγουμε $\xi_k=\alpha+k\frac{b-\alpha}{\nu}$, $k=1, 2, \dots, \nu$.

Η ακολουθία Riemann είναι:

$$R_\nu = \frac{b-\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}f(\xi_k) = \frac{b-\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}e^{\xi_k} = \frac{b-\alpha}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}e^{\alpha+k\Delta x} = \frac{b-\alpha}{\nu}e^\alpha\sum_{k=1}^{\nu}e^{k\Delta x} \quad ή$$

$$R_\nu = \frac{b-\alpha}{\nu}e^\alpha\left(e^{\Delta x}+e^{2\Delta x}+\dots+e^{\nu\Delta x}\right) = \frac{b-\alpha}{\nu}e^\alpha e^{\Delta x}\left(1+e^{\Delta x}+\dots+e^{(\nu-1)\Delta x}\right) \quad ή$$

$$R_\nu = \frac{b-\alpha}{\nu}e^\alpha e^{\Delta x}\frac{e^{\nu\Delta x}-1}{e^{\Delta x}-1} = e^\alpha e^{\Delta x}\left(e^{\nu\Delta x}-1\right)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} \quad \left(\Delta x=\frac{b-\alpha}{\nu}\right)$$

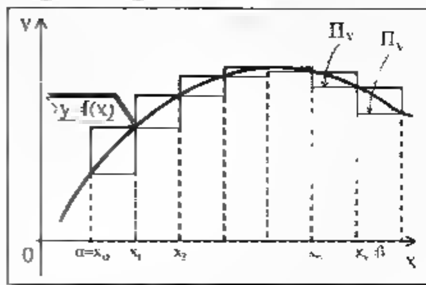
Είναι $\nu\cdot\Delta x=b-\alpha$, $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\Delta x = \lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{b-\alpha}{\nu}=0$ οπότε $\lim\limits_{\nu\to+\infty}e^{\Delta x}=1$

και $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$ ή $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}=1$. Άρα

$$\lim_{\nu\to+\infty}R_\nu = e^\alpha\left(e^{b-\alpha}-1\right) = e^b-e^\alpha = \int_\alpha^b e^x dx .$$

1.3 Η έννοια του εμβαδού επίπεδου χωρίου

Οπως ειπαμε και στην εισαγωγή με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρωματος μπορουμε να ορισουμε το εμβαδον του χωρίου (Α), που περικλείεται από τη γραφικη παρασταση μιας συνεχούς συναρτησης f, τις ευθειες x = α, x = b και τον αξονα x΄x (Σχ.1 γραμμοσκιασμένο χωρίο)



(Σχήμ. 1)

Θεωρουμε λοιπον μια συνεχή συναρτηση f στο [α, b] για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε x∈ [α, b].

Σε κάθε διαμεριση $P_\nu : \alpha = x_0 < x_1 < ... < x_{\nu-1} < x_\nu = b$ του [α, b] μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα εσωτερικό πολύγωνο Π'_ν και ένα εξωτερικό πολύγωνο Π_ν . (Σχημ. 1)

Το Π'_ν αποτελείται απο τα ορθογώνια με βάσεις $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ και υψη $f(\varepsilon_k)$. Επομένως το εμβαδόν του είναι:

$$s_\nu = f(\varepsilon_1)\,\Delta x + f(\varepsilon_2)\,\Delta x + ... + f(\varepsilon_\nu)\,\Delta x$$ δηλαδη

το κατωτερο άθροισμα της f στο [α, b] για τη διαμεριση P_ν.

Αναλογα, το εμβαδόν του Π_ν ειναι

$$S_\nu = f(\mu_\nu)\,\Delta x + f(\mu_2)\,\Delta x + ... + f(\mu_\nu)\,\Delta x$$ δηλαδή

το ανωτερο αθροισμα της f στο [α, b] για τη διαμέριση P_ν.

Επειδη η συνάρτηση f ως συνεχής, είναι ολοκληρώσιμη στο [α, b] υπαρχουν τα ορια

$$\lim_{\nu \to +\infty} s_\nu \quad \text{και} \quad \lim_{\nu \to +\infty} S_\nu$$

και ειναι ίσα με το ολοκληρωμα $\int_\alpha^b f(x)dx$.

Ορίζουμε λοιπόν ως **Εμβαδόν του χωρίου Α το κοινό όριο των ακολουθιων (s_ν) και (S_ν) δηλαδή το ορισμένο ολοκλήρωμα**

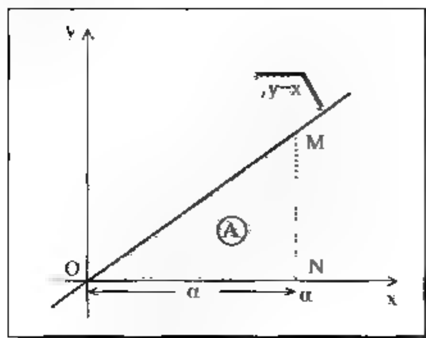
$$\int_\alpha^b \mathbf{f(x)dx} \ .$$

Παρατήρηση

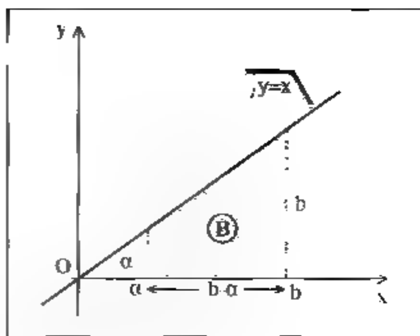
- Οταν υπολογίζουμε τα εμβαδά επίπεδων χωρίων οι διαιρέσεις των αξονων εκφράζουν μηκος.
- Το εμβαδόν του χωριου στην περίπτωση που δεν ισχύει $f(x) \geq 0$ θα μελετηθει αργότερα.

Εφαρμογή 10

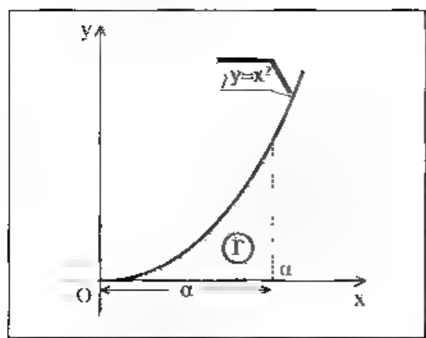
Να υπολογιστούν τα εμβαδά Ε(Α), Ε(Β), Ε(Γ), Ε(Δ) των χωρίων Α, Β, Γ, Δ (Σχ. 1, 2, 3, 4)



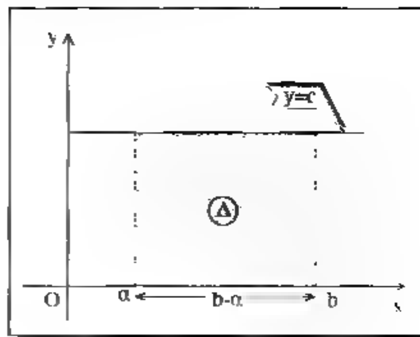
(σχήμα 1)



(σχήμα 2)



(σχήμα 3)



(σχήμα 4)

ΛΥΣΗ

i) Η συναρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής και μη αρνητική στο $[0, \alpha]$ οπότε έχουμε :

$$E(A) = \int_0^{\alpha} x dx = \frac{\alpha^2 - 0^2}{2} = \frac{1}{2}\alpha^2 .$$

που συμφωνεί με τον τύπο του εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου (το χωριο Α ειναι ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο γιατί η ευθεία $y = x$ ειναι διχοτόμος της γωνιας $\widehat{xOy}$).

ii) Η $f(x) = x$ είναι πάλι συνεχής και θετική στο $[\alpha, b]$ οπότε έχουμε :

$$E(B) = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{b} x dx = \frac{1}{2}(b^2 - \alpha^2) = \frac{1}{2}(b-\alpha)(b+\alpha)$$

που συμφωνεί με τον γωνστο τύπο του εμβαδού τραπεζίου.
(Το τραπέζιο Β εχει βάση μεγάλη b βαση μικρή α και ύψος b α αφου η ευθεια y x διχοτομεί τη γωνια $\widehat{xOy}$).

iii) Η συναρτηση $f(x) = x^2$ είναι συνεχης και μη αρνητική στο [0, α] οποτε εχουμε :

$$E(\Gamma) \quad \int_0^{\alpha} f(x)dx = \int_0^{\alpha} x^2 dx = \frac{\alpha^3}{3}$$

iv) Η συνάρτηση $f(x) = c$ είναι θετική και συνεχής στο [α, b] οποτε εχουμε .

$$E(\Delta) = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx \quad \int_{\alpha}^{b} c dx = c(b - \alpha)$$

που συμφωνει με το γνωστο τυπο του εμβαδού ορθογωνίου.

1.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Οταν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχεις στο διάστημα [α, b], τότε και οι συναρτησεις

$$f \pm g, \lambda f, (\lambda \in R), |f|, f \cdot g, \frac{f}{g} \left(g(x) \neq 0, x \in [\alpha, b]\right) \text{ και } \sqrt[v]{f} \left(f(x) \geq 0, x \in [\alpha, b]\right)$$

ειναι συνεχείς στο [α, b].
Επομένως είναι **ολοκληρώσιμες** στο [α, b].
Ειδικοτερα ισχυουν οι επόμενες ιδιότητες που διευκολυνουν τον υπολογισμο ολοκληρωματων.

Γραμμικοτητα του ολοκληρωματος.

Προταση 1

Αν f, g είναι συνεχείς στο [α, b] και λ, μ∈ R , τοτε ισχυουν

$$\textbf{i)} \int_{\alpha}^{b} \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) dx = \lambda \int_{\alpha}^{b} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{b} g(x)dx$$

$$\textbf{ii)} \int_{\alpha}^{b} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{b} f(x)dx$$

Απόδειξη

i) Αν P_v ειναι μια διαμέριση του [α, b] και $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_v\}$ είναι ένα συνολο ενδιαμεσων σημείων αυτής, τοτε από τις ισοτητες

$$(\lambda f + \mu g)(\xi_k) = \lambda (f(\xi_k) + \mu g(\xi_k)) , \; k = 1, 2, ..., v$$

παιρνουμε :

$$\sum_{k=1}^{\nu} (\lambda f + \mu g)(\xi_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{\nu} (\lambda f(\xi_k)\Delta x + \mu g(\xi_k)\Delta x) =$$

$$\lambda \sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x + \mu \sum_{k=1}^{\nu} g(\xi_k)\Delta x \qquad (1)$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες υπάρχουν τα όρια των αθροισμάτων (1) και ισχύει:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{\nu} (\lambda f+\mu g)(\xi_k)\Delta x\right) = \lambda \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x + \mu \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{\nu} g(\xi_k)\Delta x\right)\right)$$

που (σύμφωνα με την πρόταση 2 της παραγράφου 1. 2) σημαίνει ότι :

$$\int_{\alpha}^{b} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx = \lambda \int_{\alpha}^{b} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{b} g(x)dx$$

ii) Προκύπτει από την (i) για μ = 0.

Παρατήρηση

Αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, ..., f_\nu$ είναι συνεχείς στο διάστημα [α, b] και $\lambda_k \in \mathbb{R}$, k = 1, 2, ..., ν τότε επαγωγικά έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{b} [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_\nu f_\nu(x)]\, dx =$$

$$=\lambda_1 \int_{\alpha}^{b} f_1(x)dx + \lambda_2 \int_{\alpha}^{b} f_2(x)dx + \dots + \lambda_\nu \int_{\alpha}^{b} f_\nu(x)dx$$

Πρόταση 2 √

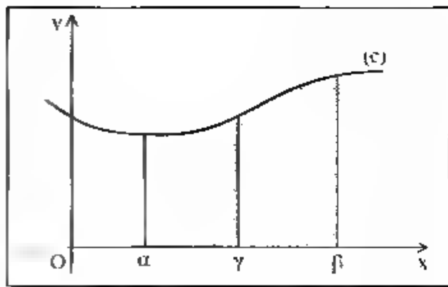
Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Η απόδειξη παραλείπεται.

Παρατηρήσεις

- Η προηγούμενη ισότητα είναι γνωστή ως σχέση Chasles στα ολοκληρώματα. Το διπλανό σχήμα δείχνει γεωμετρικά τη σχέση Chasles.



- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_\nu$ είναι οποιαδήποτε σημεία του [α, β] τότε επαγω

γιακά έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma_1} f(x)dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x)dx + \dots + \int_{\gamma_\lambda}^{\beta} f(x)dx$$

● *Μονοτονία του ολοκληρώματος*

Πρόταση 3

Για δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα [α, β] ισχύουν:

i) Αν για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ είναι $f(x) > 0$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0 .$$

ii) Αν για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ είναι $f(x) < g(x)$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx .$$

iii) $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$.

Απόδειξη

i) Για κάθε διαμέριση Pν του [α, β] και καθε σύνολο ενδιάμεσων σημείων αυτής $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_\nu\}$ είναι $\Delta x > 0$ και $f(\xi_k) \geq 0$, k = 1, 2, ...,ν. Έτσι έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x \geq 0$$

οποτε και $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{\nu} f(\xi_k)\Delta x\right) > 0$

ii) Επειδη $g(x) - f(x) \geq 0$ από την (1) προκύπτει :

$$0 \leq \int_{\alpha}^{\beta} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \text{ ή } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

iii) Επειδή για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ ισχυουν οι ανισότητες

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ και οι συναρτήσεις f(x) και |f(x)| είναι ολοκληρωσιμες, σύμφωνα με την (ii) έχουμε:

$$-\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx < \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$$

που σημαίνει ότι: $\displaystyle\left|\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$

Παρατήρηση

Οταν εμφανιζονται ολοκληρώματα της μορφης $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ με $x_1 > x_2$

οι ανισοτητες της προτασης (3) δεν ισχύουν ως έχουν. Ισχυουν εφ΄ οσον διατυπωθούν κατάλληλα με χρήση της γνωστής ισότητας

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = -\int_{x_2}^{x_1} f(x)dx$$

● *Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού*

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] τότε:
i) Υπάρχουν m, M ∈ IR τέτοια ώστε

$$m(\beta - \alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le M(\beta - \alpha)$$

ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈ [α, β] τέτοιο ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

Αποδειξη

i) Αν m, M ειναι η ελάχιστη και η μεγιστη τιμή της f στο διαστημα [α, β] , τοτε για κάθε x∈ [α, β] ισχύουν $m \le f(x) \le M$. Επομενως σύμφωνα με την προταση 3 εχουμε.

$$\int_{\alpha}^{\beta} m dx \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \int_{\alpha}^{\beta} M dx \quad \text{ή} \quad m(\beta - \alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le M(\beta - \alpha)$$

ii) Επειδη $\alpha < \beta$ η (i) γραφεται:

$$m \le \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le M$$

● Αν m = M, τότε $\frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(x_\varepsilon) = f(x_\mu)$

(οπου $f(x_\varepsilon) = \mu$ και $f(x_\mu) = M$) οπότε $\xi = x_\varepsilon$ ή $\xi = x_\mu$

● Αν m ≠ M, τότε επειδη η συνάρτηση f είναι συνεχης στο [α, β] και ο αριθμός

$\frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ βρίσκεται μεταξύ της ελάχιστης και μεγιστης τιμης της f, σύμ -

φωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμης, υπαρχει ξ∈ [α, β] τετοιο ωστε

$$f(\xi) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx \quad ή \quad \int_\alpha^\beta f(x)dx = f(\xi)\,(\beta - \alpha)$$

Σημείωση: Θα αποδείξουμε με αλλο τρόπο στα επόμενα οτι ξ∈ (α,b) και μπορεί να υπαρχει και ξ ≠ ξ με την παραπανω ιδιότητα.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

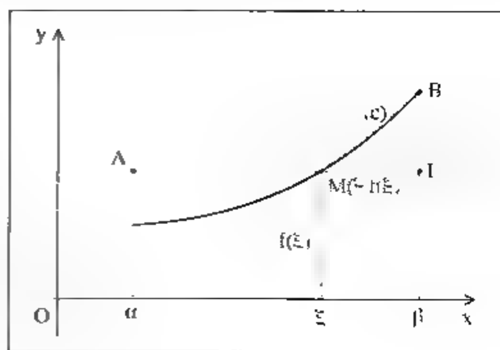
Εστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για καθε x∈ [α, β]

Ειναι γνωστό ότι το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδον του χωριου που οριζει η γραφική παράσταση της f, οι ευθείες x = α, x = β και ο άξονας x΄x

Συμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει ξ∈ (α, β) τέτοιο ώστε :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta - \alpha)\,f(\xi)$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου αΔΓβ είναι (β - α) f(ξ) (σχ. 1) .
Συνεπώς υπάρχει ξ∈ (α, β) τέτοιο ωστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο την (c) , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β να είναι ισο με το εμβαδόν του ορθογωνιου που έχει βάση (β - α) και υψος f(ξ).



(σχ. 1)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Με βάση τις ιδιότητες να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 3)\,dx$ ii) $\int_0^1 \frac{3x^2}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{3}{x^2+1}\,dx$

iii) $\int_0^1 (2e^x - x^2 + 1)\,dx$ iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu 2x)\,dx$

ΛΥΣΗ

i) Ειναι

$$\int_0^1 (3x^2 - 2x + 3)\,dx = 3\int_0^1 x^2\,dx - 2\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 3dx$$

$$= 3\,\frac{1^3}{3} - 2\,\frac{1^2 - 0^2}{2} + 3(1 - 0) = 3$$

ii) Είναι

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{3}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{3x^2+3}{x^2+1}dx =$$

$$\int_0^1 \frac{3(x^2+1)}{x^2+1}dx = \int_0^1 3\,dx = 3(1-0) = 3$$

iii) Είναι

$$\int_0^1 (2e^x - x^2 + 1)\,dx = 2\int_0^1 e^x dx - \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 dx$$

$$= 2(e^1 - e^0) - \frac{1^3}{3} + 1(1-0) = 2e - \frac{4}{3}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Θυμίζουμε ότι

- $\int_\alpha^\beta c\,dx = c\,(\beta - \alpha)$
- $\int_\alpha^\beta x\,dx = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$
- $\int_0^\alpha x^2\,dx = \frac{\alpha^3}{3}$
- $\int_\alpha^\beta e^x\,dx = e^\beta - e^\alpha$

Εφαρμογή 2

Για ποιες τιμές του α ισχύουν οι ισότητες;

i) $\int_0^\alpha 3x^2dx = 64$ ii) $\int_{-\alpha}^{2\alpha}(x+1)dx = \frac{9}{2}$ iii) $\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,dx = 0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε :

i) $\int_0^\alpha 3x^2dx = 3\int_0^\alpha x^2dx = 3\,\frac{\alpha^3}{3} = \alpha^3$. Άρα $\alpha^3 = 64$ και συνεπώς $\alpha = 4$.

ii) $\int_{-\alpha}^{2\alpha}(x+1)\,dx = \int_{-\alpha}^{2\alpha} x\,dx + \int_{-\alpha}^{2\alpha} 1\,x = \frac{4\alpha^2 - (-\alpha)^2}{2} + 1\,(2\alpha - (-\alpha)) = \frac{3\alpha^2}{2} + 3\alpha$

Άρα $\frac{3\alpha^2}{2} + 3\alpha = \frac{9}{2}$ ή $\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$ από την οποία έχουμε $\alpha = -3$ ή $\alpha = 1$

iii) $\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,dx = \frac{\alpha^2 - (-\alpha)^2}{2} = 0$ συνεπώς η σχέση iii) ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Εφαρμογή 3

Όταν $P(x) = Ax + B$ αποδείξτε ότι

i) $\int_\alpha^b P(x)dx = (b - \alpha)P\left(\frac{\alpha + b}{2}\right)$ ii) $P(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} P(t)\,dt$

ΛΥΣΗ

Είναι :

i) $\int_\alpha^b P(x)dx = \int_\alpha^b (Ax + B)\,dx = A\int_\alpha^b x\,dx + \int_\alpha^b B\,dx = A\frac{b^2-\alpha^2}{2} + B(b-\alpha) =$

$$= (b-\alpha)P\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)$$

ii) $\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} P(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} (At+B)\,dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} B\,dt + \frac{1}{2}A\int_{x-1}^{x+1} t\,dt =$

$$= \frac{1}{2}B\left[(x+1)-(x-1)\right] + \frac{1}{4}A\left[(x+1)^2-(x-1)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(2B + 2Ax) = Ax + B = P(x)$$

Εφαρμογή 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x|x-1|}{x^2-1} + \beta x^2 + 1$. Αν είναι $f'(2) = 9$ και $\int_2^3 (2\alpha - 3\beta)\,dx = 12$, να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β.

ΛΥΣΗ

Για $x > 1$ είναι $|x-1| = x-1$ άρα στο διαστημα [2, 3] έχουμε :

$f(x) = \frac{\alpha x}{x+1} + \beta x^2 + 1$ με $f'(x) = \frac{\alpha}{(x+1)^2} + 2\beta x$

άρα $f'(2) = \frac{\alpha}{9} + 4\beta$ (1)

Είναι ακόμη: $\int_2^3 (2\alpha - 3\beta)\,dx = (2\alpha-3\beta)(3-2) = 2\alpha - 3\beta$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε το σύστημα.

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{9} + 4\beta = 9 \\ 2\alpha - 3\beta = 12 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} \alpha + 36\beta = 81 \\ 2\alpha - 3\beta = 12 \end{cases}$$ από το οποίο

παιρνουμε $\alpha = 9$, $\beta = 2$.

Εφαρμογή 5

Να αποδειχθεί ότι: $I = \int_\alpha^\beta |x| dx = \frac{1}{2}(\beta|\beta| - \alpha|\alpha|), \quad \alpha < \beta.$

ΛΥΣΗ

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

1ο. $\alpha < \beta < 0$. Τότε στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι $|x| = -x$ και το ολοκλήρωμα γράφεται.

$$I = \int_\alpha^\beta |x| dx = \int_\alpha^\beta -x dx = -\frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) = -\frac{1}{2}(-\beta|\beta| + \alpha|\alpha|) =$$

$$\frac{1}{2}(\beta|\beta| - \alpha|\alpha|) \text{ γιατί } |\beta| = -\beta, \ |\alpha| = -\alpha.$$

2ο. $\alpha \leq 0 < \beta$. Τοτε στο διάστημα $[\alpha, 0]$ ειναι $|x| = -x$ και στο διάστημα $[0, \beta]$ ειναι $|x| = x$. Το ολοκλήρωμα γραφεται

$$I = \int_\alpha^\beta |x| dx = \int_\alpha^0 (-x) dx + \int_0^\beta x dx = -\int_\alpha^0 x dx + \int_0^\beta x dx =$$

$$\int_0^\alpha x dx + \int_0^\beta x dx = \frac{1}{2}(\beta^2 + \alpha^2) = \frac{1}{2}(\beta|\beta| - \alpha|\alpha|) \text{ γιατί } |\beta| = \beta, \ |\alpha| = -\alpha$$

3ο. $0 < \alpha < \beta$. Τοτε στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι $|x| = x$ και το ολοκλήρωμα γραφεται.

$$I = \int_\alpha^\beta |x| dx = \int_\alpha^\beta x dx = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) = \frac{1}{2}(\beta|\beta| - \alpha|\alpha|) \text{ γιατί } |\beta| = \beta, \ |\alpha| = \alpha$$

Εφαρμογή 6

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ το οποίο περιέχει τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τότε:

i) $\int_\gamma^\delta f(x)\,dx + \int_\delta^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = 0$

ii) $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \int_\gamma^\delta f(x)\,dx + \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx \int_\delta^\beta f(x)\,dx + \int_\alpha^\delta f(x)\,dx \int_\beta^\gamma f(x)\,dx$

ΛΥΣΗ

i) Ειναι: $\int_\gamma^\delta f(x) dx + \int_\delta^\beta f(x) dx + \int_\beta^\gamma f(x) dx = \int_\gamma^\gamma f(x) dx = 0$

ii) 1ο μέλος $= \int_\alpha^\beta f(x) dx \int_\gamma^\delta f(x) dx + \left[\int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^\gamma f(x) dx\right] \int_\delta^\beta f(x) dx \ +$

$$+\left[\int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\delta f(x) dx\right] \int_\beta^\gamma f(x) dx =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx \int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \left[\int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx \right] +$$

$$+ \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx \left[\int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx \right]$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \int_{\gamma}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx \int_{\delta}^{\delta} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \cdot 0 + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx \cdot 0 \quad 0$$

Εφαρμογή 7***

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν $\alpha \leq \gamma < \delta < \beta$ να αποδειχθεί ότι :

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

ΛΥΣΗ

Είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \quad \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx$ (1)

Επειδή είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ θα είναι :

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx \geq 0 \quad \text{και} \quad \int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0 \quad \text{συνεπώς και}$$

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx > 0 \quad \text{ή} \quad \left(\text{προσθέτουμε } \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx\right)$$

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx \quad \text{και από την (1)}$$

έχουμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx$

Εφαρμογή 8

Να αποδείξετε ότι:

i) $-2 \leq \int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}\,dx \leq \frac{2}{3}$ **ii)** $0 \leq \int_{1}^{e} \ln^3 x\,dx \leq e - 1$

ΛΥΣΗ

i) η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^5}{x+2}$ είναι παραγωγίσιμη στο [-1, 1]

με $f'(x) = \frac{2x^4(2x+5)}{(x+2)^2} \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Αρα η f ειναι αύξουσα (γνησίως) στο [-1, 1] και συνεπώς όταν

$-1 \leq x \leq 1$ θα είναι $f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$ ή

$$-1 \leq \frac{x^5}{x+2} \leq \frac{1}{3} \text{ αρα } \int_{-1}^{1} (-1)\,dx \leq \int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}\,dx \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}\,dx \text{ ή}$$

$$-2 \leq \int_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}\,dx \leq \frac{2}{3}$$

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \ln^3 x$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1, e] με

$$f'(x) = 3\frac{\ln^2 x}{x} > 0 \text{ για καθε } x \in (1, e].$$

Αρα η f είναι γνησίως αυξουσα στο διαστημα [1, e]και συνεχής , συνεπώς για $1 < x < e$ θα έχουμε $f(1) < f(x) < f(e)$. Επομένως η f έχει ελαχιστο $m = f(1)$ και μεγιστο $M = f(e)$.

Συμφωνα με την ανισότητα $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq M(\beta - \alpha)$ εχουμε

$f(1)(e-1) \leq \int_{1}^{e} f(x)\,dx \leq f(e)(e-1)$ και επειδή $f(1) = 0$, $f(e) = 1$ έχουμε

$$0 \leq \int_{1}^{e} f(x)\,dx \leq e-1 \quad \text{ή} \quad 0 \leq \int_{1}^{e} \ln^3 x\,dx \leq e-1$$

Παρατήρηση

Στο ερώτημα i) χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $g(x) \leq f(x)$, $\alpha < \beta$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx .$$

Η απάντηση βέβαια μπορούσε να δοθεί οπως και στο ερώτημα ii) με τη βοήθεια δηλαδη της ανισότητας $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq M(\beta - \alpha)$

Εφαρμογή 9

Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\pi}{2e} \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\varepsilon\varphi x}\, dx \leq \frac{\pi}{2} e$ **ii)** $\frac{2}{9} < \int_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{5+4x-x^2}} < \frac{1}{3}$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση $f(x) = e^{\varepsilon\varphi x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ με $f'(x) = \frac{e^{\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$

για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ άρα f γνησίως αύξουσα και συνεπώς όταν $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

θα είναι $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) < f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ή $\frac{1}{e} < e^{\varepsilon\varphi x} < e$ από την οποία έχουμε

$$\frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) < \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\varepsilon\varphi x}\, dx < e\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{ή}$$

$$\frac{\pi}{2e} < \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\varepsilon\varphi x}\, dx < \frac{\pi}{2} e$$

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{5+4x-x^2}}$ ορίζεται στο διάστημα [2, 3] και είναι

παραγωγίσιμη σ' αυτό με $f'(x) = \frac{1}{x^2\left(5+4x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} < 0$ για κάθε $x \in [2, 3]$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [2, 3] και συνεπώς όταν $2 < x \leq 3$ θα είναι $f(2) \geq f(x) \geq f(3)$ η $\frac{1}{9} < \frac{1}{x\sqrt{5+4x-x^2}} \leq \frac{1}{6}$ από την οποία έχουμε

$$\frac{1}{9}(3-1) \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{x\sqrt{5+4x-x^2}}\, dx < \frac{1}{6}(3-1)$$ δηλαδή το ζητούμενο.

Εφαρμογή 10

Να αποδειχθεί ότι $\frac{1}{3} \int_{-1}^{2} \frac{x}{e^x}\, dx \leq e^{-1}$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-1, 2]$ με

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{1-x}{e^x}.$$

Έχουμε τον πίνακα :

x	-1	1	2
f΄	+	0	-
f	↗	Τ.Μ	↘

Άρα η f έχει στο $x_0 = 1$ τοπικό μέγιστο (είναι και ολικό).

Επομένως

$$f(x) \le f(1) \text{ ή } \int_{-1}^{2} \frac{x}{e^x}\,dx < e^{-1}(2+1) \text{ ή }$$

$$\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} \frac{x}{e^x}\,dx < e^{-1}$$

Εφαρμογή 11

Χωρίς να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα να αποδειχθεί ότι :

i) $\int_1^2 (x^4+3x^3+6x)\,dx > \int_1^2 (x^4+3x^3+x^2+3x+2)\,dx$

ii) $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt < \int_1^x \frac{1}{t}\,dt < \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \quad , x > 1$

ΛΥΣΗ

i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$x^4 + 3x^3 + 6x \ge x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2 \quad \text{για κάθε } x \in [1, 2]$$

ή $-x^2 + 3x - 2 \ge 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

Το τριώνυμο $-x^2 + 3x - 2$ έχει ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ άρα στο διαστημα [1, 2] ισχυει $-x^2 + 3x - 2 > 0$ συνεπώς θα ισχυει και

$$x^4 + 3x^3 + 6x > x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2 \quad \text{επομένως}$$

$$\int_1^2 (x^4+3x^3+6x)\,dx > \int_1^2 (x^4+3x^3+x^2+3x+2)\,dx$$

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι στο διάστημα [1, x] ισχύει : $\frac{1}{t^2} < \frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$

Πράγματι για $t \ge 1$ ισχύει προφανώς $t^2 > t > \sqrt{t}$ άρα $\frac{1}{t^2} < \frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$ η

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt \le \int_1^x \frac{1}{t}\,dt < \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

Εφαρμογή 12

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^{\alpha} ημx\,dx \geq \int_0^{\alpha}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)dx$, $\alpha > 0$.

ΛΥΣΗ

Αρκει να αποδείξουμε ότι ισχύει $ημx \geq x - \frac{x^3}{6}$ για καθε $x \in [0, \alpha]$.

Θεωρουμε τη συνάρτηση $f(x) = ημx - x + \frac{x^3}{6}$, $x \geq 0$.

Ειναι $f(0) = 0$, $f'(x) = συνx - 1 + \frac{x^2}{2}$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) = -ημx + x = x - ημx > 0$ για κάθε $x > 0$. Αρα η συνάρτηση f΄ είναι γνησίως αυξουσα στο $[0, +\infty)$. Συνεπως για $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0)$ ή $f'(x) > 0$ αρα και η συνάρτηση f(x) ειναι γνησιως αυξουσα στο $[0, +\infty]$ και συνεπώς για $0 < x$ θα ειναι $f(0) \leq f(x)$ ή $ημx - x + \frac{x^3}{6} > 0$

$ημx > x - \frac{x^3}{6}$ σχέση που ισχύει για κάθε $x > 0$ άρα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0, \alpha]$ όπου $\alpha > 0$.

Επομένως θα ειναι : $\int_0^{\alpha} ημx\,dx \geq \int_0^{\alpha}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)dx$

Εφαρμογή 13 *

Εστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [0,1] με την ιδιότητα

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}(m + M)$$

οπου m η ελάχιστη τιμή της f στο [0, 1] και M η μέγιστη τιμή της g στο [0, 1]. Να αποδείξετε ότι : $\int_0^1 f(x)g(x)dx < \frac{m^2 + M^2}{2}$

ΛΥΣΗ

Ισχυει $(f(x) - m)(g(x) - M) < 0$ για κάθε $x \in [0,1]$

αρα $f(x)\,g(x) < mg(x) + Mf(x) - mM$ ή

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx < m\int_0^1 g(x)\,dx + M\int_0^1 f(x)\,dx - mM(1 - 0) \text{ ή}$$

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx < m\frac{m + M}{2} + M\frac{m + M}{2} - mM = \frac{m^2 + M^2}{2}$$

ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΦΟΙΤΗΤΗΣ Μ.Π.Ι.

Εφαρμογή 14

i) Αν η f συνεχής συνάρτηση στο [α, b] με f(x) > 0 για κάθε x∈[α, b] τότε ισχύει και $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx > 0$

ii) Αν f συνεχής συνάρτηση στο [α, b] με f(x) ≥ 0 για κάθε x∈[α, b] αποδείξτε ότι αν $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = 0$ τότε f(x) = 0 για κάθε x∈[α, b].

ΛΥΣΗ

i) Επειδή f συνεχής στο [α, b] είναι ολοκληρώσιμη οποτε σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού υπάρχει ξ∈[α, b] με

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = f(\xi)\,(b - \alpha) > 0 \text{ άρα } \int_{\alpha}^{b} f(x)dx > 0 .$$

ii) Εστω ότι υπάρχει x_0∈[α, b] με $f(x_0) \neq 0$, τότε $f(x_0) > 0$. Επειδή f συνεχης στο [α, b], άρα και στο x_0 θα υπάρχει διάστημα [γ, δ] ⊆ [α, b] τέτοιο ώστε· για κάθε x∈[γ, δ] να είναι f(x) > 0 άρα:

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx > 0 \quad \text{(συμφωνα με το ερώτημα i)}$$

και επειδή [γ, δ] ⊆ [α, b] θα είναι:

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx > \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx \quad \text{(βλέπε εφαρμογή 7) ή } \int_{\alpha}^{b} f(x)dx > 0 \text{ άτοπο.}$$

Άρα f(x) = 0 για κάθε x∈[α, b].

Παρατήρηση

Στα επομενα θα θεωρούμε γνωστή τη σχέση:

$$\text{" } f(x) > 0 \text{ στο } [\alpha, b] \text{ τότε } \int_{\alpha}^{b} f(x)dx > 0 \text{ "}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι οταν f(x) < 0 στο [α, b] τότε $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx < 0$

Εφαρμογή 15

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [0, x], x∈$\mathbb{R}^*$ και $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ με την ιδιότητα ότι σε δύο σημεία x_1, x_2 ∈(0, x) έχουμε $F(x_1) = F(x_2)$. Η f δεν μηδενιζεται σε όλο το διάστημα [x_1, x_2] δηλαδή υπάρχει τουλάχιστο ένα σημειο x_0∈(x_1, x_2) για το οποίο έχουμε $f(x_0) \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν α, b ∈(x_1, x_2) έτσι ώστε f(α) και f(b) να έχουν αντίθετα πρόσημα.

ΛΥΣΗ

Απο τη σχέση $F(x_1) = F(x_2)$ έχουμε:

$$\int_0^{x_1} f(t)\,dt = \int_0^{x_2} f(t)\,dt \quad ή \quad \int_0^{x_2} f(t)\,dt - \int_0^{x_1} f(t)\,dt = 0$$

$$ή \quad \int_{x_1}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{x_2} f(t)\,dt = 0 \quad ή \quad \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt = 0$$

Αν υποθέσουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ τότε θα είναι :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) > 0 \text{ (εφαρμογή 14) ατοπο.}$$

Ομοια αν υποθέσουμε οτι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ τοτε θα είναι :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dx < 0 \text{ πάλι άτοπο}$$

και επειδη η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[x_1, x_2]$ θα υπάρχουν σημεία α, b του διαστηματος (x_1, x_2) για τα οποία οι τιμές $f(\alpha)$ και $f(b)$ θα είναι ετερόσημες.

Εφαρμογή 16

Έστω συναρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Αν είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ με τη βοήθεια της γεωμετρικης σημασίας του ολοκληρώματος να αποδειχθεί ότι:

i) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε είναι:

$$(\beta - \alpha)\, f(\alpha) < \int_\alpha^\beta f(x)\,dx < (\beta - \alpha)\,\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$$

ii) Αν $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε είναι :

$$(\beta - \alpha)\,\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} < \int_\alpha^\beta f(x)\,dx < (\beta - \alpha)\, f(\beta)\,.$$

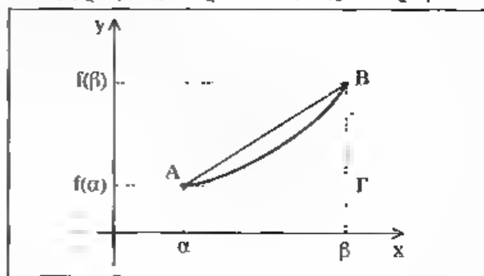
ΛΥΣΗ

Εστω c η γραφική παράσταση της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε.

i) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε η γραφική παράσταση της f στρεφε. τα κοίλα άνω στο $[\alpha, \beta]$ σχ.1.

Το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την (c) του άξονα των x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ είναι

$$E = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$



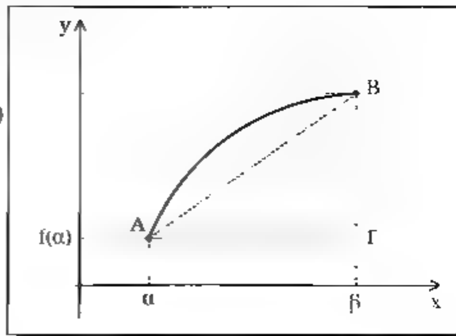
σχημα 1

Είναι όμως :
Εμβαδόν (αβΓΔ) < Ε < Εμβαδόν (αβΒΑ) δηλαδή

$$(\beta - \alpha)\, f(\alpha) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha)$$

ii) Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε η (c) στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει :
Εμ(αβΓΑ) < Ε < Ε(αβΒΑ) δηλαδή

$$(\beta - \alpha)\, f(\beta) > \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx > \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha)$$



Εφαρμογή 17

Να προσδιοριστούν οι συνεχείς συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 1] για τις οποίες ισχύει :

$$\int_0^1 x f(x) dx > \frac{1}{3} > \int_0^1 f^2(x) dx$$

ΛΥΣΗ

Ισχύει προφανώς $(x - f(x))^2 \geq$ ή $x f(x) \leq \dfrac{x^2 + f^2(x)}{2}$ (1)

Από την (1) (με ολοκλήρωση) έχουμε :

$$\int_0^1 x f(x) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 + f^2(x)\right) dx \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 x^2\, dx + \int_0^1 f^2(x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)\, dx < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

η $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx < \frac{1}{3}$ και επειδή από την υπόθεση έχουμε

$\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx > \frac{1}{3}$ έχουμε τελικώς $\displaystyle\int_0^1 x f(x) = \frac{1}{3}$

Από την (1) έχουμε ακόμη $f^2(x) > 2x f(x) - x^2$ συνεπώς :

$$\int_0^1 f^2(x) \geq 2\int_0^1 x f(x) - \int_0^1 x^2 = 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \int_0^1 f^2(x) \geq \frac{1}{3}$$

Επομένως

$$\int_0^1 xf(x) - \int_0^1 \frac{x^2 + f^2(x)}{2}\, dx \quad ή \quad \int_0^1 (x - f(x))^2\, dx = 0$$

και επειδή f συνεχής και $(x - f(x))^2 \geq 0$ συμπεραινουμε ότι $f(x) = x$ για καθε $x \in [0, 1]$. (εφαρμογή 14)

Εφαρμογή 18 *** Λεξικοθήρα

i) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και $\alpha \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\alpha f(x)dx \leq \sqrt{\alpha \int_0^\alpha f^2(x)dx} \qquad (1)$$

ii) Με τη βοήθεια της (1) αποδείξτε ότι:

$$0 \leq \int_0^\pi \sqrt{x}\ ημx \leq \pi \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ΛΥΣΗ

Η f συνεχης στο $\mathbb{R}$ άρα και $f^2(x)$ συνεχης στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0, \alpha]$ με $\alpha \geq 0$

Ειναι $f^2(x) \geq 0$ άρα $\int_0^\alpha f^2(x)\, dx \geq 0$ και συνεπως $\sqrt{\alpha \int_0^\alpha f^2(x)\, dx} \in \mathbb{R}$

Η f ειναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και $f(x) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ συνεχής και επειδη $(f(x) + \lambda)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ θα είναι : $\int_0^\alpha (f(x) + \lambda)^2\, dx \geq 0$.

$$\text{Είναι} \quad \int_0^\alpha (f(x) + \lambda)^2\, dx = \int_0^\alpha \left(f^2(x) + 2\lambda\, f(x) + \lambda^2\right) dx =$$

$$\int_0^\alpha f^2(x)\, dx + 2\lambda \int_0^\alpha f(x)\, dx + \lambda^2 \int_0^\alpha dx =$$

$$\alpha \cdot \lambda^2 + 2\lambda \int_0^\alpha f(x)\, dx + \int_0^\alpha f^2(x)\, dx \geq 0 \qquad (2)$$

Η (2) ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και είναι δευτεροβάθμια ως προς λ με συντελεστη του λ^2 το $\alpha > 0$ (όταν $\alpha = 0$ η σχέση ισχύει προφανώς ως ισότητα). Άρα πρεπει :

$$\Delta \leq 0 \quad ή \quad \left(2\int_0^\alpha f(x)\, dx\right)^2 - 4\alpha \int_0^\alpha f^2(x)\, dx \leq 0 \quad ή$$

$$\left(\int_0^\alpha f(x)\, dx\right)^2 \leq \alpha \int_0^\alpha f^2(x)\, dx \quad ή \quad \int_0^\alpha f(x)\, dx \leq \sqrt{\alpha \int_0^\alpha f^2(x)\, dx}$$

ii) Θέτουμε $f(x) = \sqrt{x}\ ημx$ και $\alpha = \pi$. Είναι τότε:

$$\int_0^\pi \sqrt{x}\ ημx\, dx \leq \sqrt{\pi \int_0^\pi x\, ημ^2(x)\, dx} \qquad (3)$$

Στο $[0, \pi]$ ισχυει $x\,\eta\mu^2 x = |\,x\,\eta\mu^2 x\,| < |x| = x$ άρα :

$$\int_0^\pi x\,\eta\mu^2(x)\,dx < \int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{2}$$ και συνεπώς η (3) γράφεται

$$\int_0^\pi \sqrt{x}\;\eta\mu x\,dx < \sqrt{\pi \int_0^\pi x\,\eta\mu^2(x)\,dx} < \sqrt{\pi \cdot \frac{\pi^2}{2}} = \pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Εφαρμογή 19 Αρχιζοσαρα

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα [α, β] να αποδείξετε οτι

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \le \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx \cdot \int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx$$

(Schwarz)

ΛΥΣΗ

Ισχυει προφανώς $(f(x) + \lambda\, g(x))^2 \ge 0$ για καθε $\lambda, x \in \mathbb{R}$ ή

$$f^2(x) + 2\lambda\, f(x)\,g(x) + \lambda^2 g^2(x) \ge 0 \text{ ή}$$

$$\lambda^2 \int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx + 2\lambda \int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx \ge 0 \qquad (1)$$

Επειδη η (1) αληθεύει για καθε $\lambda \in \mathbb{R}$ θα είναι $\Delta \le 0$ άρα :

$$4\left[\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\right]^2 - 4\int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx \le 0 \text{ ή}$$

$$\left[\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \le \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx \int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx$$

(Να διερευνήσετε την περιπτωση $\int_\alpha^\beta g^2(x)\,dx = 0$).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η ανισότητα αυτή είναι πολύ χρήσιμη και καλό είναι ο υποψήφιος να τη γνωρίζει (με την απόδειξη της) φυσικά.

Εφαρμογή 20

Εστω συναρτηση f συνεχής στο [α, b]. Να αποδειχθεί ότι :

$$\left[\int_\alpha^b f(x)\,\eta\mu x\,dx\right]^2 + \left[\int_\alpha^b f(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx\right]^2 \le (b-\alpha)\int_\alpha^b f^2(x)\,dx$$

ΛΥΣΗ

Ισχυει $$\left[\int_\alpha^b f(x)\,\eta\mu x\,dx\right]^2 \le \int_\alpha^b f^2(x)\,dx \cdot \int_\alpha^b \eta\mu^2(x)\,dx$$ (ανισότητα Schwarz)

$$\left[\int_\alpha^b f(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx\right]^2 \le \int_\alpha^b f^2(x)\,dx \cdot \int_\alpha^b \sigma\upsilon\nu^2(x)\,dx$$

Με πρόσθεση έχουμε :

$$\left[\int_\alpha^b f(x)\,\eta\mu x\,dx\right]^2+\left[\int_\alpha^b f(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx\right]^2\le\int_\alpha^b f^2(x)\,dx\cdot\left[\int_\alpha^b \eta\mu^2(x)\,dx+\int_\alpha^b \sigma\upsilon\nu^2(x)\,dx\right]=$$

$$=\int_\alpha^b f^2(x)\,dx\cdot\left[\int_\alpha^b \eta\mu^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2(x)\,dx\right]=\int_\alpha^b f^2(x)\,dx\cdot\int_\alpha^b 1\,dx=(b-\alpha)\int_\alpha^b f^2(x)\,dx$$

Εφαρμογή 21

Έστω f, φ συνεχείς συναρτήσεις στο [α, b] με $\varphi(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha, b]$.

Αποδείξτε ότι i) $m\int_\alpha^b \varphi(x)dx < \int_\alpha^b f(x)\,\varphi(x)dx < M\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx$ **(1)**

όπου m, M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο [α, b].

ii) Υπάρχει $c\in[\alpha, b]$ τέτοιο ώστε $\int_\alpha^b f(x)\,\varphi(x)dx = f(c)\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx$ **(2)**

ΛΥΣΗ

i) Επειδή f, φ συνεχής στο [α, b] θα είναι και f · φ συνεχης στο [α, b].
Ισχύει $m \le f(x) \le M$ ή $m\,\varphi(x) \le f(x)\,\varphi(x) \le M\,\varphi(x)$ για κάθε $x\in[\alpha, b]$ άρα

$$m\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx \le \int_\alpha^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \le M\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx \qquad (1)$$

ii) Αν $\varphi(x)=0$ τότε η (2) είναι προφανής.

Αν $\varphi(x)>0$ τότε είναι και $\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx>0$ οπότε από την (1) παίρνουμε

$$m \le \frac{\int_\alpha^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx} \le M$$

και σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $c\in[\alpha, b]$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\int_\alpha^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx}=f(c) \quad \text{ή} \quad \int_\alpha^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx$$

Παρατήρηση

- Από τη σχέση (1) θέτοντας $\varphi(x)=1$.

  Έχουμε $m(b-\alpha) \le \int_\alpha^b f(x)\,dx \le M(b-\alpha)$

- Από τη σχέση (2) για $\varphi(x) = 1$ έχουμε :

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx = f(c)\,(b - \alpha)$$

Δηλαδή έχουμε το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού. Η προηγούμενη εφαρμογή λέγεται και γενικευμένο θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.

Εφαρμογή 22

Ποιό από τα ολοκληρώματα $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha} 2^x\, dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\, dx$, $\alpha>1$ είναι μεγαλύτερο;

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με την εφαρμογή 21 αν θέσουμε $\varphi(x) = x^{\alpha-1}$, $f(x) = x2^x$ έχουμε:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha} 2^x\, dx = c \cdot 2^c \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\, dx \quad \text{με} \quad c \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$$

Η συνάρτηση $f(x) = x \cdot 2^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και είναι

$$\frac{1}{2}\, 2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} < 1 \quad \text{επομένως για} \quad c \le \frac{1}{2} \quad \text{είναι}$$

$$f(c) \le f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} < 1 \quad \text{ή} \quad c \cdot 2^c < 1 \quad \text{συνεπώς}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha} 2^x\, dx < \int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}\, dx$$

Εφαρμογή 23

Αν $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$, $h(x) \ge 0$ και $I_\nu = \int_0^1 h^{\nu}(x)\, dx$ τότε για $\nu \ge 2$, $\nu \in N$ ισχύει η σχέση : $I^2_{\nu-1} < I_\nu \cdot I_{\nu-2}$

ΛΥΣΗ

Με χρήση της ανισότητας του Schwarz έχουμε διαδοχικά :

$$I_\nu^2 = \left[\int_0^1 \left[h^{\nu-2}(x)\, h(x)\right] dx\right]^2 = \left[\int_0^1 \left[h^{\frac{\nu}{2}}(x) \cdot h^{\frac{\nu-2}{2}}(x)\right] dx\right]^2 \le \int_0^1 h^{\nu}(x)\, dx \int_0^1 h^{\nu-2}(x)\, dx$$

$= I_{\nu} I_{\nu+2}$

Άρα : $I^2_{\nu+1} \le I_{\nu} \cdot I_{\nu+2}$, για κάθε $\nu \ge 2$

Εφαρμογή 24

Να δείξετε ότι αν οι συναρτήσεις h και g είναι συνεχείς στο [α, b] και

$$\int_{\alpha}^{b} h(x)\,dx = \int_{\alpha}^{b} g(x)\,dx, \quad \text{τότε υπάρχει}$$

$\xi \in [\alpha, b]$ τέτοιο, ώστε $h(\xi) = g(\xi)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση με $F(x) = h(x) - g(x)$, $x \in [\alpha, b]$

Η F είναι συνεχής στο [α, b] και βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού υπάρχει $\xi \in [\alpha, b]$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{\alpha}^{b} F(x)\,dx = F(\xi)\,(b - \alpha), \quad \text{δηλαδή}$$

$$\int_{\alpha}^{b} [h(x) - g(x)]\,dx = [h(\xi) - g(\xi)]\,(b - \alpha) \quad \text{ή}$$

$$\int_{\alpha}^{b} h(x)\,dx - \int_{\alpha}^{b} g(x)dx = (b - \alpha)\,[h(\xi) - g(\xi)] \quad \text{ή}$$

$$(b - \alpha)\,[h(\xi) - g(\xi)] = 0 \quad \text{ή} \quad h(\xi) = g(\xi)$$

Εφαρμογή 25

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0, 1] για την οποία ισχύει :

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \dfrac{1 - x_0^3}{1 - x_0}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - (1 + x + x^2)$ η οποία είναι συνεχής στο [0, 1]. Έχουμε:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (1 + x + x^2)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - 1 - \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx =$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0 \qquad (1)$$

Συμφωνα με το θεώρημα της μέση τιμής του ολοκληρωτικου λογισμου υπαρχει $x_o \in [0, 1]$ με

$$g(x_o)\,(1 - 0) = \int_0^1 g(x)\,dx = 0 \quad ή \quad g(x_o) = 0$$

Ειναι όμως $g(x_o) = f(x_o)\,(1 + x_o + x_o^2)$ αρα $f(x_o) = 1 + x_o + x_o^2$ ή $f(x_o) = \dfrac{1 - x_o^3}{1 - x_o}$

Εφαρμογή 26

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(t) \le \dfrac{x}{x^2 + 1}$ για κάθε $t \in [x, x+1]$, $x > 1$.

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\int_x^{x+1} f(t)\,dt \right) = 0$

ΛΥΣΗ

i) για $t \in (1, +\infty)$ είναι $f'(t) = \dfrac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} < 0$ οπότε η συνάρτηση f ειναι γνησιως φθινουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Επομενως για $x > 1$ και $t \in [x, x + 1]$ είναι $f(t) \le f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

ii) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $t \in [x, x+1]$ ισχύει:

$$0 \le f(t) < \frac{x}{x^2 + 1}, \quad \text{οπότε} \quad 0 \le \int_x^{x+1} f(t)\,dt \le \int_x^{x+1} \frac{x}{x^2 + 1}\,dt =$$

$$= \frac{x}{x^2 + 1} \int_x^{x+1} 1dt = \frac{x}{x^2 + 1}(x + 1 - x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Ειναι ομως $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0$ αρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολης θα ειναι

θα είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = 0$.

Εφαρμογή 27

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, b]$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt, \quad x \in [\alpha, b]$$

είναι συνεχής συνάρτηση.

ΛΥΣΗ

Εστω $x \in [\alpha, b]$ και $x + h$ κάθε $[\alpha, b]$.

$$\text{Ειναι} \quad F(x+h) = \int_{\alpha}^{x+h} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \quad \text{ή}$$

$$F(x+h) = F(x) + \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \quad \text{ή}$$

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt \qquad (1)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού υπαρχει $\theta \in [x, x+h] \subseteq [\alpha, b]$ τέτοιο ώστε : $\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = f(\theta) \cdot h$

οπότε η (1) γράφεται: $F(x+h) - F(x) = f(\theta) \cdot h$ από την οποία είναι φανερο οτι όταν $h \to 0$ τότε $\lim_{h \to 0} [F(x+h) - F(x)] = 0$ ή

$$\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$$

Επομένως F συνεχης σε κάθε $x \in [\alpha, b]$.

Εφαρμογή 28

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [0, 1] και $6\int_0^1 f(x)\,dx = 2\alpha + 3b + 6c$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_o \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = \alpha x_o^2 + b x_o + c$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 6\,[f(x) - (\alpha x^2 + \beta x + c)]$ η οποια ειναι συνεχης στο [0, 1].

Έχουμε :

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 6\int_0^1 f(x)\,dx - (2\alpha + 3b + 6c) = 0 \qquad (1)$$

Επειδή g συνεχής στο [0, 1] υπάρχει $x_o \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε :

$$\int_0^1 g(x)\,dx = g(x_o)\,(1 - 0) = g(x_o) = 0 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) εχουμε :

$$g(x_o) = 0 \quad \text{άρα} \quad f(x_o) = \alpha x_o^2 + b x_o + c.$$

Εφαρμογή 29

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0 \\ e & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και

ii) ότι $\int_0^1 f(x)\,dx < e$.

ΛΥΣΗ

i) Θεωρούμε $x = \frac{1}{y}$ τότε όταν $x \to 0^+$ το $y \to +\infty$ και συνεπώς

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e = f(0)$$

άρα f συνεχής στο 0.

ii) Θεωρούμε τη συναρτηση $g(x) = \ln(1+x) - x,\ x \geq 0$.

Είναι $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$ για κάθε $x > 0$ αρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ συνεπώς για $x > 0$ είναι $g(x) < g(0)$ ή

$\ln(1+x) - x < 0$ ή $\ln(1+x) < x$ ή $\frac{\ln(1+x)}{x} < 1$ για κάθε $x > 0$ ή ακόμη

$\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} < 1$ ή $(1+x)^{\frac{1}{x}} < e$ από τα προηγούμενα έχουμε ότι για κάθε $x \in (0,1]$ ισχύει $f(x) < e$ οποτε $\int_0^1 f(x)\,dx < e$.

Εφαρμογή 30

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α, b]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in [\alpha, b]$ τέτοιο ώστε : $\int_\alpha^c f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt$ **(1)**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συναρτηση g με $g(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt$. Σύμφωνα με την εφαρμογή 27 η g είναι συνεχής στο [α, b] με $g(\alpha) = -\int_\alpha^b f(t)\,dt$ και $g(b) = \int_\alpha^b f(t)\,dt$

Αν $g(\alpha) = 0$ τοτε και $g(b) = 0$ και αντίστροφα επομένως η (1) ισχυει $c = \alpha$ (ή $c = b$)
Εστω $g(\alpha) \neq 0$ και $g(b) \neq 0$ τότε είναι :

$$g(\alpha) \cdot g(b) = -\left(\int_\alpha^b f(t)\,dt\right)^2 < 0$$

αρα υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ (Θεώρημα Bolzano) τέτοιο ώστε $g(c) = 0$ ή

$$\int_\alpha^c f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt = 0 \quad ή \quad \int_\alpha^c f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt$$

Εφαρμογή 31

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, b]$ και ένα πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές τέτοιο ώστε αν υποθέσουμε $P(\alpha) < P(b)$ (ή $P(b) < P(\alpha)$) τοτε ισχύει $P(\alpha) < b - \alpha < P(b)$ (ή $P(b) < b - \alpha < P(\alpha)$). Να αποδειξτε ότι υπάρχουν αριθμοί c_1, c_2 του διαστήματος $[\alpha, b]$ ώστε να ισχύει :

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx = P(c_1) \cdot f(c_2)$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = P(x) + \alpha - b$. Έχουμε τότε:

i) Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$ ως πολυωνυμική

ii) Είναι $g(\alpha) = P(\alpha) + \alpha - b < 0$ (γιατί από την υπόθεση $P(\alpha) < b - \alpha$)

$g(b) = P(b) + \alpha - b > 0$ (γιατί από τη υπόθεση $P(b) > b - \alpha$)

άρα $g(\alpha)\, g(b) < 0$ συνεπώς υπάρχει $c_1 \in [\alpha, b]$ με $g(c_1) = 0$ ή

$P(c_1) + \alpha - b = 0$ ή $P(c_1) = b - \alpha$ (1)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$ αρα σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικου λογισμού υπάρχει $c_2 \in (\alpha, b)$ τετοιο ωστε :

$$\int_\alpha^b f(x) = (b - \alpha)\, f(c_2) \text{ ή λόγω της (1)}$$

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx = P(c_1) \cdot f(c_2)$$

Εφαρμογή 32

Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, b]$ με τις ιδιότητες $f(\alpha) > \alpha^2$,

$$3\int_\alpha^b f(x)\,dx < b^3 - \alpha^3, \quad \alpha < b.$$

Να αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi^2$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$ αρα συμφωνα με το θεωρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικου λογισμου υπάρχει $c \in [\alpha, b]$ τέτοιο ώστε :

$$\int_\alpha^b g(x)\,dx = (b - \alpha)\, g(c) \text{ ή } \int_\alpha^b \left(f(x) - x^2\right) dx = (b - \alpha)\, g(c) \quad (1)$$

Είναι $\int_{\alpha}^{b}(f(x) - x^2)\,dx = \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{b} x^2\,dx$

$$= \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{0} x^2\,dx - \int_{0}^{b} x^2\,dx$$

$$= \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx - \frac{b^3 - \alpha^3}{3} < 0$$ και συνεπώς λόγω της (1)

Είναι: $(b - \alpha)\,g(c) < 0$ ή $g(c) < 0$

Εχουμε τωρα:

i) Η g ειναι συνεχής στο $[\alpha, c]$

ii) $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha^2 > 0$, $g(c) < 0$ άρα $g(\alpha)\,g(c) < 0$ συνεπώς (θεώρημα Bolzano) υπάρχει $\xi \in (\alpha, c) \subset (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$ η $f(\xi) - \xi^2 = 0$ η $f(\xi) = \xi^2$

Εφαρμογή 33

Εστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $(0, +\infty)$ με $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Αν υπαρχουν τα όρια: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ και για κάθε $\nu \in N^*$

$$\int_{\nu}^{\nu+1} f(x)\,dx = \int_{\nu}^{\nu+1} g(x)\,dx$$

να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $\int_{\nu}^{\nu+1} f(x)\,dx = \int_{\nu}^{\nu+1} g(x)\,dx$ ή $\int_{\nu}^{\nu+1} f(x)\,dx - \int_{\nu}^{\nu+1} g(x)\,dx = 0$ ή

$$\int_{\nu}^{\nu+1} (f(x) - g(x))\,dx = 0 \qquad (1)$$

Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $(0, +\infty)$ άρα και σε κάθε διάστημα της μορφής $[\nu, \nu + 1]$, $\nu \in N^*$ συνεπώς και η $f(x) - g(x)$ είναι συνεχής στο $[\nu , \nu + 1]$

Συμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμου υπαρχει $c_\nu \in [\nu, \nu + 1]$ τέτοιο ώστε :

$$0 = \int_{\nu}^{\nu+1} (f(x) - g(x))\,dx = (\nu + 1 - \nu) \cdot (f(c_\nu) - g(c_\nu))$$ ή

$$f(c_\nu) - g(c_\nu) = 0 \quad \text{ή} \quad f(c_\nu) = g(c_\nu)$$

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(c_\nu) = \alpha \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} g(c_\nu) = b.$$

Επειδή $f(c_\nu) = g(c_\nu)$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(c_\nu) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(c_\nu)$

άρα $\alpha = b$ συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τη βοήθεια του ορισμού να δείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν ολοκλήρωμα και να υπολογιστούν αυτά.

1) $f:[\alpha,b],\ f(x)=x^2$

2) $f:[\alpha,b],\ f(x)=x^3$

3) $f:[1,2],\ f(x)=\alpha^x$

4) $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ f(x)=\varepsilon\varphi x$

2. Με βάση τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος κατά Riemann να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_\alpha^b \ln x\,dx,\ 0<\alpha<b$

ii) $\int_\alpha^b \eta\mu x\,dx$

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}3^{-x}, & -1\le x<0\\ 3^x, & 0\le x\le 1\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα [- 1, 1] και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ με βάση τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος κατά Riemann.

4. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, b] με την ιδιότητα ότι σε κάθε ανοικτό διάστημα (x', x'') του [α, b] υπάρχουν σημεία ξ, η του (x', x'') έτσι ώστε $f(\xi)=g(\eta)$.
Να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^b f(x)\,dx = \int_\alpha^b g(x)\,dx$

5. Να υπολογιστεί η παράσταση

i) $I = \int_0^1 (6x^2+3e^x-x+1)\,dx + \int_0^1 (-3x^2-3e^x+3x)\,dx$

ii) $I = \int_0^1 (e^x+x^4-x)\,dx - \int_0^1 (x^4+x^3+x)\,dx$

6. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^2 (3x-1)\,dx$

ii) $\int_0^2 (-x^2+3x-2)\,dx$

7. Να προσδιοριστούν οι τιμές του α ώστε να ισχύουν οι ισότητες.

i) $\int_0^\alpha 3x^2\,dx = 64$

ii) $\int_\alpha^\alpha (2x+1)\,dx = 2\sqrt{3}$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int (|x+1| + 2|x-2|)\, dx$$

9. Αν P(x) πολυώνυμο βαθμου ≤ 2 αποδειξτε οτι

$$I = \int_{\alpha}^{b} P(x)dx = \frac{b-\alpha}{6}\left[P(\alpha) + 4P\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) + P(b)\right]$$

10. Να αποδειχθούν οι ανισότητες

i) $\int_{4}^{9} (x^2 - 13x + 36)\, dx \leq 0$

ii) $\int_{2}^{4} (2x^2 + 1)\, dx \leq \int_{2}^{4} 3x^2\, dx$

11. Να αποδειχθουν οι ανισοτητες

i) $\int_{\alpha}^{b} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx \geq 2(b - \alpha)$, $\alpha < b < 0$

ii) $\left|\int_{0}^{\pi} x\, \sigma\upsilon\nu x\, dx\right| \leq \frac{\pi^2}{2}$

iii) $\int_{0}^{3\pi} \frac{1}{2 + \sigma\upsilon\nu^2 x}\, dx \geq \pi$

12. Να αποδειξτε ότι

$\frac{2}{\pi} x \leq \eta\mu x \leq x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και

κατόπιν $\frac{1}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{x}\, dx \leq \frac{\pi}{4}$

13. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\, dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

14. Να αποδειχθει ότι

$$\frac{3}{4} < \int_{1}^{2} f(x)\, dx < \frac{3}{5}$$

οπου $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

15. Να αποδειχθεί οτι

$$\frac{\pi}{3} < \int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x)\, dx < \frac{5\pi}{12}$$

16. Να αποδειξετε ότι

i) $0 \leq \int_{\frac{1}{2}}^{0} x \ln(1 - x^2)\, dx \leq \frac{1}{4} \ln \frac{4}{3}$

ii) $1 \leq \int_{0}^{1} e^{x^2} \leq e$

17. Χωρις να υπολογίσετε τα ολοκλήρωμα να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq \int_{5}^{6} \frac{2x - 9}{2x + 5}\, dx \leq 1$$

18. Χωρις να υπολογισετε το ολοκλήρωμα να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{3} - 1 < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi x}\, dx < 1$$

$$1{,}57 < \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\eta\mu^2 x}\, dx < 1{,}91$$

19. Αποδείξτε ότι

i) $0 < \int_{1}^{e} \ln x < e - 1$

ii) $\frac{1}{e} < \int_{0}^{1} \frac{1}{e^x}\, dx < 1$

20. Να αποδειχθούν οι ανισότητες

21. Χωρις να υπολογιστουν τα ολοκληρώματα να βρειτε ποιό είναι το μεγαλύτερο.

α) $\int_{0}^{1} \sqrt{1 + x^2}\, dx$ ή $\int_{0}^{1} x\, dx$

β) $\int_{0}^{1} x^2 \eta\mu^2 x\, dx$ ή $\int_{0}^{1} x\, \eta\mu^2 x\, dx$

γ) $\int_{1}^{2} e^{x^2}\, dx$ ή $\int_{1}^{2} e^x\, dx$

22. Εστω f η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση $f(x)=\int_1^2 \frac{ημ(xt)}{t}\,dt$

Να αποδειξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, \pi/4]$. με τον ορισμό.

23. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) > 0$, $f''(x) > 0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$ αποδείξτε ότι για $\alpha > 1$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} f(x)\,dx > \left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right) f(1)$$

24. Χωρίς να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι

$$\int_1^e \ln x\,dx \le \int_1^e \frac{3x+1}{2+2x}\,dx$$

25. Να βρεθεί το όριο της ακολουθιας

$$\alpha_\nu=\int_0^1 \frac{\nu x}{1+x^\nu}\,dx\ ,\ \nu\in N^*$$

26. Να αποδειξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^6}\int_0^{x^2}(\sqrt{t}\,ημt+tσυνt)\,dt\ ,\right]=0$$

27. Αν $f(x)=\frac{e^x}{x}$ να αποδείξετε ότι

i) $f(t) > \frac{e^{x+1}}{x+1}$ για καθε $t\in[x+1, x+2]$, $x>1$

ii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty}\int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt$. ,

28. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x > 1$.

Αποδείξτε ότι : $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt=0$

29. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$.

Να αποδείξτε ότι.

i) $f(t)\le\frac{x^2}{e^x}$ για κάθε $t\in[x, x+1]$, $x>2$

ii) $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)\,dt=0$

30. Να αποδείξετε ότι αν $f(x)=e^{x^2}$ τότε

$$\frac{4}{3}<\int_0^1 f(x)\,dx$$

31. Αν f ,g συνεχεις συναρτησεις στο $[\alpha, b]$ με $f(x)\,g(x) > 1$ για καθε $x\in[\alpha,b]$ αποδείξτε οτι:

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx\int_\alpha^b g(x)\,dx\ge(b-\alpha)^2$$

32. Αν f συνεχης συνάρτηση στο $[0, 1]$ και ισχύει $\int_0^1 f(x)\,dx=1$

να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0, 1]$ έτσι ώστε $f(x_0)=3x_0^{\,2}$.

33. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ με

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}.$$

αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τετοιο ώστε $f(\xi)=\frac{4}{\pi}\xi_0$

34. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $A=[\alpha, b]$ με $f(A)=[\alpha, b]$. Να δειξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστο 4 θεσεις x_1, x_2, x_3, x_4 του $[\alpha, b]$ έτσι ώστε

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx=f(x_1)\,f'(x_2)\,(x_3-x_4)$$

35. Έστω f συνεχής συναρτήσης στο $[\alpha, b]$ Αν m είναι η ελάχιστη τιμή της f στο $[\alpha,b]$ και M η μέγιστη αποδείξτε ότι αν

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx=0 \text{ τότε}$$

$$\int_\alpha^b f^2(x)\,dx\le-mM(b-\alpha)$$

36. i) Έστω f(x), g(x) συνεχείς συναρτήσεις στο [α,b], $g(x) \geq 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε:

$$\int_\alpha^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\cdot\int_\alpha^b g(x)\,dx\,.$$

ii) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^\nu}{1+x}\,dx$

37. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α, b] και $0 < M = \max |f(x)|$, $x \in [\alpha, b]$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_\alpha^b |f(t)|^\nu\,dt \leq (b-\alpha)M^\nu,\ \nu \in N^*$

ii) $\lim \sqrt[\nu]{\int_\alpha^b |f(t)|^\nu\,dt} \leq M\ \ \nu \in N^*$

38. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α, b] με $f(\alpha) > 0$ και $\int_\alpha^b f(x)\,dx < 0$.

Να αποδείξτε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε $f(c) = 0$.

39. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α, b] με την ιδιότητα $\int_\alpha^b f(x)\,dx > 0$

Να αποδείξετε ότι για $c > \frac{1}{b-\alpha}$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) < c\int_\alpha^b f(x)\,dx$$

40. Έστω η συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο [-1, 1] με f′(x) αύξουσα. Να αποδείξτε ότι

$$\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu^3 x\,dx = \pi f(\xi)$$

41. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, \ln 2]$ τέτοιο ώστε $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx = f(\xi)\ln 2$

42. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [0, π] με την ιδιότητα $\int_\alpha^b f(x)\,dx = 0$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in [0, \pi]$ με $f(\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$

43. Να βρεθεί συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0, 1] με τις ιδιότητες $f(0) = f'(0) = 1$, $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $\int_\alpha^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$

44. Έστω η συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο [-1, 1] με f′(x) αύξουσα. Να αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)\,dx \leq f(-1) + f'(1)$$

45. Να αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $\left|e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-t^2}\,dt\right| < \sqrt{\frac{2}{e}}$

46. Έστω f συνεχής στο [0, 1] με την ιδιότητα $3\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $c \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(c) = c^2$.

47. Έστω f μια συνάρτηση f : συνεχής στο [α, b]. Αν υπάρχει ένα σημείο x_0 του (α, b) έτσι ώστε $f(x_0) \neq 0$ τότε υπάρχει μια περιοχή του x_0 έτσι ώστε για κάθε $x \neq x_0$ που ανήκει σ' αυτήν να έχουμε

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt \neq 0$$

48. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και θετ.κη για καθε $x \in [\alpha, b]$ αποδείξτε ότι οταν m, M η ελάχιστη και η μεγιστη τιμή της f στο $[\alpha, b]$ αντιστοιχως, ισχύει:

$$\frac{m}{M}(b-\alpha)^2 < \int_\alpha^b f(x)\,dx \int_\alpha^b \frac{1}{f(x)}\,dx \le \frac{M}{m}(b-\alpha)^2$$

49. Εστω συνάρτηση f συνεχής για κάθε $x \ge 0$ και $0 \le \alpha < b$ και για κάθε ξ → c ισχυε.

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx < \int_{\alpha+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$

50. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, b]$ με $\alpha < f(x) < b$, $0 < \alpha < b$. Να αποδειξτε οτι υπαρχει $x_o \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx < f(x_o)\frac{(b-\alpha)\sqrt{b^2-\alpha^2}}{\sqrt{b^2-f^2(x_o)}}$$

51. Έστω f συνεχης στο $[\alpha, b]$ με $f(x) \neq 0$ για καθε $x \in [\alpha, b]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, b]$ με $x_1 < x_2$ ωστε $f(x_1)\,f(x_2) < 0$.

52. Εστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, b]$ με την ιδ.ότητα ότι σε κάθε υποδιαστημα (x', x'') του $[\alpha, b]$ υπάρχει $\xi \in (x', x'')$ με $f(\xi) = 0$. Να αποδείξτε ότι

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx = 0$$

53. Να αποδειχθεί ότι οταν η f διατηρει σταθερο προσημο στο $[\alpha, b]$ τότε ισχυει

$$\left|\int_\alpha^b f(x)\,dx\right| = \int_\alpha^b |f(x)|\,dx.$$

54. Αν $m, \nu \in N^*$ να αποδείξτε ότι οταν $0 < \alpha < b$ και $0 < \ln\alpha < \frac{m}{\nu} < \ln b$ τοτε ισχύει

$$(b-\alpha)\left(\frac{\nu}{m}\right)^m e^m < \int_\alpha^b \frac{x^\nu}{\ln^m x}\,dx < A(b-\alpha)$$

όπου A ο μεγαλύτερος από τους αρ.θμούς $\frac{\alpha^\nu}{\ln^m\alpha}$, $\frac{b^\nu}{\ln^m b}$.

55. Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ θεωρούμε τις συναρτησεις

$f_\nu(x) = (\sigma\upsilon\nu x)^{2x+2\nu\pi}$, $\nu \in N^*$.

Αν $\alpha_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\nu(x)\,dx$ να αποδείξτε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι συγκλίνουσα.

56. Έστω (α_ν), (b_ν) και (γ_ν) τρείς ακολουθίες θετικών αριθμών με τις ιδιότητες: $\alpha_\nu < b_\nu$ για κάθε $\nu \in N^*$,

$$\lim_{\nu\to+\infty}(\alpha_\nu\gamma_\nu) = \lim_{\nu\to+\infty}(b_\nu\gamma_\nu) = L \in \mathbb{R}$$

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g: R \to \mathbb{R}$ με $g(x) \neq 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$ και τις ακολουθίες (I_ν) και (J_ν) με γενικους όρους:

$$I_\nu = \int_{\alpha_\nu}^{b_\nu} f(\gamma_\nu x)\,dx \quad \text{και} \quad J_\nu = \int_{\alpha_\nu}^{b_\nu} g(\gamma_\nu x)\,dx$$

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{\nu\to+\infty}\frac{I_\nu}{J_\nu}$.

57. Έστω $h: [\alpha, b] \to R$ μια συνεχη συναρτηση. Να δείξετε ότι υπάρχει $c \in [\alpha, b]$ τέτοιο, ώστε

$$\int_\alpha^c h(t)\,dt = \int_c^b h(t)\,dt.$$

58. Εστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, b]$ με $f(\alpha) > \alpha$ και

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx < \frac{b^2 - \alpha^2}{2}.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ τέτοιο ωστε $f(c) = c$.

59. Εστω η συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, b]$ με $c \le f(x) \le d$, όπου $\alpha, b, c, d, > 0$, $\alpha < b$, $c < d$. Να ...ιε οτι:

$$\int_\alpha^b \frac{dx}{f(x)} < \frac{b-\alpha}{c}.$$

60. Έστω f, g συνεχεις συναρτησεις στο $[\alpha, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει θετικός αριθμος A τέτοιος ωστε

$$\left|\int_\alpha^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \le A\left|\int_\alpha^b g(t)\,dt\right|$$

61. Εστω η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$ με

$$\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right)\left(\int_\gamma^\delta f(x)\,dx\right) < 0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, $\kappa < \lambda$ τέτοιοι ωστε

$$\int_\kappa^\lambda f(x)\,dx = 0$$

62. Εστω h μια συνάρτηση συνεχης και μονοτονη στο $[\alpha, b]$ και F με

$$F(x) = (x - \alpha)\int_x^b h(t)\,dt + (x - b)\int_\alpha^x h(t)\,dt,\ x \in [\alpha, b]$$

Να δειξετε οτι η F δεν αλλαζει πρόσημο στο $[\alpha, b]$.

63. Εστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, b]$ με την ιδιότητα $\int_\alpha^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$ για καθε συνεχή συνάρτηση g(x) στο $[\alpha, b]$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για καθε $x \in [\alpha, b]$.

64. Εστω f μια συνεχης συναρτηση στο $[\alpha, b]$ παραγωγίσιμη στο (α, b). Έστω

$$f(\alpha) \neq 0 \text{ και } \int_\alpha^b f(t)\,dt = 0$$

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ τέτοιο ωστε $f(\alpha)\,f'(c) < 0$.

ii) Αν $f(\alpha)\,f(b) > 0$ να αποδειξετε οτι υπαρχουν $c_1, c_2 \in (\alpha, b)$ τέτοιοι ώστε $f'(c_1)\,f'(c_2) < 0$

65. Έστω P, Q δύο πολυώνυμα με θετικούς συντελεστές με βαθμος P(x) < βαθμός Q(x). Εστω f, g δυο συνεχεις συναρτήσεις μη αρνητικές στο [0, 1] ετσι ωστε

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{P(v) + x}\,dx = \int_0^1 \frac{g(x)}{Q(v) + x}\,dx$$

για κάθε $v \in N^*$.

Αποδείξτε οτι $f(x) = 0$ για καθε $x \in [0, 1]$.

66. Αν f συνεχής συναρτηση στο $[\alpha, b]$ και γνησίως μονότονη αποδειξτε οτι υπάρχει μοναδικό $c \in [\alpha, b]$ τέτοιο ωστε

$$\int_\alpha^b f(x)\,dx = (b - \alpha)\,f(c)$$

67. Εστω f συνεχής συναρτηση στο $\mathbb{R}$ και g μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ με $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) \neq 0$.

Να υπολογίσετε το οριο $\lim_{x \to x_0} \dfrac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{g(x)}$

68. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$

Να αποδείξετε οτι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\,dt = \alpha$$

69. Εστω f συνεχης συνάρτηση στο $[0, +\infty]$ με την ιδιότητα

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(u)\,du = \alpha\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθια (α_ν), $\nu > 1$ με $0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots < \alpha_\nu$,

$\alpha_\nu \to +\infty$ και $\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{k=1}^{\nu} f(\alpha_\nu) = \alpha$

70. Έστω η συνάρτηση

$f_\nu(x) = (1 - x)^\nu(1 + x)^\nu$, $x\in[0, 1]$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

i) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$0 \le \int_0^1 f_\nu(x)\,dx < 1 .$$

ii) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (I_ν) με

$I_\nu = \int_0^1 f_\nu(x)\,dx$ ειναι συγκλίνουσα.

71. Εστω f μια παραγωγισιμη συνάρτηση στο [0, 1]. Αν η f΄ είναι φθινουσα και $f(0) = 0$, $f'(1) > 0$ να αποδείξετε ότι

$$\int_\alpha^1 \frac{dx}{1 + f^2(x)} < \frac{f(1)}{f'(1)}$$

Μπορει να ισχυει η ισότητα;

72. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0, 1]. Να εξεταστεί αν αληθευουν οι σχεσεις.

i) Αν $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ τότε $f(x) = 0$

για καθε $x\in[0,1]$.

ii) Αν $\int_0^1 f^2(x)\,dx = 0$ τότε $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

73. Έστω συναρτηση f συνεχης στο [α, b] με τις ιδιότητες, $f(x) > 0$ για καθε $x\in[\alpha, b]$

και $\frac{1}{b-\alpha}\int_\alpha^b \frac{1}{f(x)}\,dx < 1$.

Να υπολογίσετε το

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int_\alpha^b f^\nu(x)\,dx,\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

1.5 Αρχική συνάρτηση - Αόριστο ολοκλήρωμα

● Αρχική συνάρτηση

Ένα από τα βασικά προβλήματα του διαφορικού λογισμού είναι η ευρεση της παραγώγου ή του διαφορικού μιας συνάρτησης.

Το βασικό πρόβλημα του ολοκληρωτικού λογισμού είναι το αντιστροφο δηλαδη η εύρεση μιας συνάρτησης όταν είναι γνωστη η παράγωγος ή το διαφορικό της

Στο διαφορικό λογισμό γνωρίζοντας για παράδειγμα την εξίσωση της κινησης S(t) ενός κινητού, βρήκαμε με παραγώγιση την ταχύτητα $\upsilon(t) = \frac{dS}{dt}$ και στη συνέχεια την επιτάχυνση $\gamma(t) = \frac{d\upsilon}{dt}$. Όμως, συχνά, είναι αναγκαίο να λυσουμε το αντιθετο πρόβλημα. Δηλαδή, αν είναι γνωστή η επιταχυνση γ(t) να βρουμε την ταχυτητα υ(t) και το διάστημα S(t).

Στα μαθηματικά αυτό σημαίνει να προσδιορίσουμε μια συναρτηση όταν ξερουμε την παραγωγο αυτής. Έχουμε λοιπόν το εξής θεμελιώδες προβλημα της Αναλυσης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ και ζητειται μια συνάρτηση F παραγωγισιμη στο Δ τέτοια ώστε, για καθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$F'(x) = f(x).$$

Δινουμε τώρα τον ορισμό:

Ορισμός

Μια συνάρτηση F(x) λέγεται παράγουσα συνάρτηση ή απλά παράγουσα ή αρχική της F(x) στο διάστημα Δ όταν ισχυει:

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Η F λέγεται ακόμη και αντιπαράγωγος της f στο Δ.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η αρχική συνάρτηση ευκολα διαπιστώνουμε ότι:

Προταση

Αν υπάρχει μια αρχική συνάρτηση F της f σε ένα διάστημα Δ, τότε υπάρχουν άπειρες και μάλιστα είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F + c$, $c \in \mathbb{R}$ και μόνον αυτες.

Αποδειξη

- Αν F ειναι μια αρχική συνάρτηση της f στο Δ, τοτε για κάθε $c \in \mathbb{R}$ και η $F + c$ είναι μια αρχική συνάρτηση της f, αφού $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$.
- Αν G ειναι μια άλλη αρχικη συνάρτηση της f στο Δ, τότε για καθε $x \in \Delta$ ισχυουν

$$F'(x) = f(x) \text{ και } G'(x) = f(x)$$

οπότε $G'(x) = F'(x)$.

Αυτο ομως σημαίνει, ότι υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχυει:

$$G(x) = F(x) + c.$$

Παρατήρηση

- Από την πρόταση αυτη προκύπτει ότι για να βρούμε τις αρχικές μιας συνάρτησης f(x), αρκεί να βρούμε μια αρχική F(x), γιατι οι άλλες διαφέρουν απο αυτην κατά μια σταθερά.
- Επισημαίνουμε ότι καθε συνάρτηση δεν έχει απαραίτητα μια αρχική Για παράδειγμα η συναρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$ δεν έχει άρχική συνάρτηση.

Ιδιότητες των αρχικών συναρτήσεων

Αμεση συνέπεια των κανόνων παραγώγισης είναι οι παρακατω ιδιότητες που διευκολύνουν τον υπολογισμό των αρχικών συναρτήσεων.

Αν F και G είναι αρχικές συναρτήσεις των f και g αντιστοίχως τότε:
i) Η αF είναι αρχική συνάρτηση της α·f , α∈ℝ.
ii) Η F + G είναι αρχική συνάρτηση της f + g.

Απο τους τύπους παραγωγίσεως των στοιχειωδών συναρτήσεων προκυπτει ο παρακάτω πίνακας αρχικών συναρτήσεων.

● *Πίνακας αρχικών συναρτήσεων*

πεδίο ορισμού	Συνάρτηση f(x)	Μια αρχική της F
R	$f(x) = 0$	$F(x) = c$, c σταθερα
R	$f(x) = 1$	$F(x) = x$
R	$f(x) = x^{\nu}$, $\nu \in N^*$	$F(x) = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$
$x > 0$ ή $x < 0$	$f(x) = x^{\nu}$, $\nu \in Z \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$
$x > 0$	$f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ *
$x > 0$ ή $x < 0$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert$
R	$f(x) = συνx$	$F(x) = ημx$
R	$f(x) = ημx$	$F(x) = -συνx$
$R \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} k \in \boldsymbol{Z}$	$f(x) = \frac{1}{συν^2 x}$	$F(x) = εφx$
$R \setminus \{2k\pi\} k \in \boldsymbol{Z}$	$f(x) = \frac{1}{ημ^2 x}$	$F(x) = -σφx$
R	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
R	$f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$	$F(x) = \frac{1}{\ln\alpha}\alpha^x$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Να βρεθούν οι αρχικές των συναρτήσεων

i) $f(x) = -4x^3 + x^2 - 2$ **ii)** $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ **iii)** $f(x) = \ln x + 1$

iv) $f(x) = \frac{-x\,\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ **v)** $f(x) = \ln|x|$ **vi)** $f(x) = \frac{1-x}{e^x}$

ΛΥΣΗ

i) Μια αρχική της x^3 ειναι η $\frac{x^4}{4}$, μια αρχική της x^2 η $\frac{x^3}{3}$ και μια αρχική της σταθερας 2 είναι η 2x.

Επομένως μια αρχική της f είναι η $F(x) \quad 4\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}x^3 \quad 2x$

ενω το συνολο των αρχικών συναρτήσεων της f είναι $x^4 + \frac{1}{3}x^3 \quad 2x + c$, $c \in \mathbb{R}$

ii) Μια αρχική της $\frac{1}{x}$ είναι η $\ln|x|$ και μια αρχική της $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}}$

ειναι η $\frac{1}{\frac{1}{2}+1} \quad x^{\frac{1}{2}+1} \quad 2x^{\frac{1}{2}} \quad 2\sqrt{x}$.

Επομένως μια αρχική της f είναι η $F(x) = \ln|x| + 2\sqrt{x} = \ln x + 2\sqrt{x}$ (γιατί $x > 0$).

ενω το συνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων της f ειναι $\ln x + 2\sqrt{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

iii) Η συνάρτηση f γράφεται : $f(x) = (x)'\ln x + x\frac{1}{x}$. Άρα μια αρχική της f είναι η $F(x) = x\ln x$ ενώ το συνολο των αρχικών συναρτήσεων της f είναι

$x\ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

iv) Η συναρτηση f γράφεται $F(x) = \frac{x(\sigma\upsilon\nu x)' - (x)'\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$. Αρα μια αρχική της f

ειναι η $F(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$, ενώ το σύνολο των αρχικων συναρτήσεων της f ειναι

$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

v) Μια αρχική της f είναι η συνάρτηση.

$F(x) \quad x\ln|x| \quad x$ ($x > 0$ ή $x < 0$)

ενω το σύνολο όλων των αρχικων συναρτήσεων της f είναι οι συναρτήσεις

$x\ln|x| \quad x + c$.

vi) Η συνάρτηση f γράφεται: $f(x) \quad \frac{x' e^x \quad x(e^x)'}{e^{2x}} \quad \left(\frac{x}{e^x}\right)'$ άρα μια αρχική αυτής

είναι η συνάρτηση $F(x) \quad \frac{x}{e^x}$ ενώ το σύνολο όλων των αρχικών συναρτήσεων

της f είναι: $\frac{x}{e^x} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Όπως φαίνεται από την προηγούμενη εφαρμογη και όπως θα δουμε και στη συνέχεια η εύρεση μιας αρχικης συνάρτησης είναι δυσκολοτερη απο την παραγώγιση, γιατί δεν υπάρχει ένας γενικός κανόνας με τον οποιο μπορούμε να εργαστούμε.

Εφαρμογή 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε η συνάρτηση $F(x) = (\alpha x + \beta)\, e^{-x}$ να αποτελεί μια αρχικη συνάρτηση της f στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει να ισχύει $F'(x) = f(x)$. Είναι:

$$F\ (x) = \alpha\, e^{-x} \quad (\alpha x + \beta)\, e^{\ \ x} \quad (\alpha - \alpha x \quad \beta)\, e^{\ x}$$ επομενως πρέπει

$$(\alpha \quad \alpha x \quad \beta)\, e^x = \frac{x}{e^x} \quad \text{ή}$$

$$(\alpha - \alpha x - \beta)\, e^x = x\, e^x \quad \text{ή} \quad \alpha - \alpha x \quad \beta = x \quad \text{ή}$$

$(\alpha + 1)\, x + \beta - \alpha = 0$. Συνεπώς πρέπει $\alpha + 1 = 0$ και $\beta \quad \alpha = 0$. Άρα $\alpha = -1,\ \beta = -1$

Εφαρμογή 3

Από τις αρχικές συναρτήσεις της $f(x) = 4x^3 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $x > 0$ να προσδιορισθεί εκείνη της οποίας η γραφική παράσταση περνά από το σημειο A(1, -1).

ΛΥΣΗ

Μια αρχικη της $4x^3$ είναι η $4\frac{x^4}{4}$ και μια αρχική της $\frac{2}{3}\sqrt{x}$ είναι η

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \quad x^{\frac{3}{2}} \cdot x\sqrt{x} \ .$$

Επομένως μια αρχική της f είναι η συνάρτηση $x^4 - x\sqrt{x}$ και το σύνολο των

αρχικών της f είναι $x^4 - x\sqrt{x} + c$.

Η ζητούμενη αρχική συνάρτηση F πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη $F(1) \quad 1$ η

$$1 - 1 + c \quad 1 \text{ ή } c \quad 1$$

που σημαινει οτι $F(x) \quad x^4 - x\sqrt{x} \quad 1$.

Εφαρμογή 4

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις οι οποίες σε κάθε σημείο της γραφικης παράστασης αυτών έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3x^2 + 1$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί εκείνη της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο (1, 2).

ΛΥΣΗ

Έστω F μια συνάρτηση της οποίας ο συντελεστής διευθυνσης της εφαπτομενης στο σημείο τετμημένης x είναι $\lambda = 3x^2 + 1$, τότε θα είναι ως γνωστόν

$$F \ (x) = 3x^2 + 1$$

και όλες οι αρχικές αυτής είναι οι συναρτήσεις

$$y = x^3 + x + c \quad (1).$$

Η συνάρτηση απο τις (1) της οποίας η γραφική παράσταση διερχεται απο το σημείο (1, 2) θα ειναι εκείνη της οποίας η εξίσωση της θα επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου (1, 2).

Άρα πρέπει $1^3 + 1 + c = 2$ ή $c = 0$

και συνεπώς η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = x^3 + x$.

Εφαρμογή 5

Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $f''(x) - \frac{1}{x^3}$, $f(1) - 1$, $f'(2) = 0$, $x > 0$

ΛΥΣΗ

Από τη σχέση $f''(x) \quad \frac{1}{x^3}$ συνεπάγεται ότι $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-2} + c$ και απο αυτήν έχουμε

$f(x) \quad \frac{1}{2} x^{\ 1} + cx + c_1$.

Ειναι όμως $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} \frac{1}{2} + c + c_1 = 1 \\ \frac{1}{8} + c = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} c_1 \quad \frac{5}{8} \\ c \quad \frac{1}{8} \end{cases}$

Επομένως $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8} x + \frac{5}{8}$

● Αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός **Ονομάζουμε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα Δ το σύνολο των αρχικών συναρτήσεων αυτής και το συμβολίζουμε**

$\int f(x)\,dx$. **Δηλαδή**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c\in \mathbb{R}$$

οπου F(x) είναι μια παράγουσα της f(x).

● Η f(x) λέγεται και ολοκληρωτέα συνάρτηση και η x μεταβλητή ολοκληρωσης.

● Προφανως ισχύει: $$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c\in \mathbb{R}$$

● Το σύμβολο $\int$ στις παραπάνω ισότητες δεν σημαίνει απαραιτητα ολοκληρωση, αφού υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν αρχικές συναρτήσεις χωρις να είναι ολοκληρωσιμες.

● Γεωμετρική ερμηνεία του αόριστου ολοκληρώματος

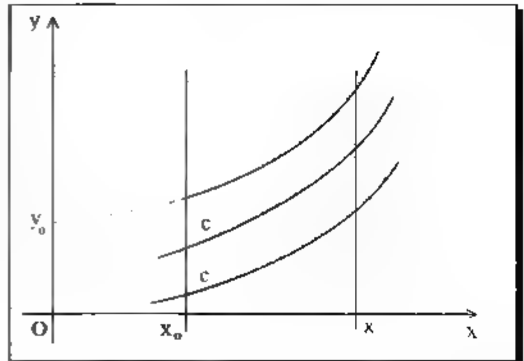
Η σχέση $y' = f(x)$ δείχνει ότι η γραφική παράσταση οποιασδηποτε αρχικης συνάρτησης η όπως λέμε οποιασδήποτε ολοκληρωτικής καμπύλης

$$y = F(x)$$

είναι τέτοια ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης σε οποιοδηποτε δοσμενο σημειο τετμημενης x έχει διεύθυνση που ορίζεται από την κλιση

$$y' = f(x) \quad (1)$$

Με αλλα λόγια, η διεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης δινεται από τη σχέση (1) για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής x. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί αυτή η καμπυλη. Αν κατασκευάσουμε μια τέτοια ολοκληρωτική καμπύλη, όλες οι καμπύλες που προκύπτουν με μετακίνηση αυτής κατά μια διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα Oy, θα έχουν παράλληλες εφαπτομένες με την ίδια κλίση $y' = f(x)$. Η παράλληλη αυτή μετατόπιση είναι ισοδύναμη με το να προσθέσουμε



μια σταθερή c στην τεταγμένη της καμπύλης. Τότε η γενική εξίσωση των καμπυλών που είναι λύσεις του προβλήματος θα είναι

$$y = F(x) + c.$$

Για να ορίσουμε την ακριβή θέση μιας καμπύλης πρέπει να μας δίνεται ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ολοκληρωτική καμπύλη. Αν για παράδειγμα η καμπύλη διέρχεται από το σημείο (x_o, y_o) τότε λόγω της (2) θα είναι

$$c = y_o - F(x_o)$$

και συνεπώς η αρχική συνάρτηση που ικανοποιεί την συνθήκη $y_o=F(x_o)$ θα είναι η

$$g(x) = F(x) + (y_o - F(x_o)).$$

Εφαρμογή 1

Να βρεθούν τα αόριστα ολοκληρώματα.

i) $\int x^{-1}(\sqrt{x}-1)^2\,dx$ **ii)** $\int \eta\mu^{-2}x\;\sigma\upsilon\nu^{-2}x\,dx$

iii) $\int (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2\,dx$ **iv)** $\int (5\sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi^2 x)\,dx$

ΛΥΣΗ

i) Ισχύει

$$\int x^{-1}(\sqrt{x}-1)^2\,dx = \int x^{-1}(x+1-2\sqrt{x})\,dx = \int\left(1+x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx =$$

$$\int\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int(x+\ln|x|-4\sqrt{x})'\,dx = x+\ln|x|-4\sqrt{x}+c,\ c \text{ σταθερά}$$

ii) Ισχύει

$$\int \eta\mu^{-2}x\,\sigma\upsilon\nu^{-2}x\,dx = \int(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)\,\eta\mu^{-2}x\,\sigma\upsilon\nu^{-2}x\,dx =$$

$$\int(\sigma\upsilon\nu^{-2}x+\eta\mu^{-2}x)\,dx = \int\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)dx = \int(\varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x)'\,dx$$

$$= \varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x + c,\ c \text{ σταθερά}$$

iii) Είναι

$$\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2\,dx = \int(x+\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x})\,dx = \int\left(x+x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{5}{6}}\right)dx$$

$$= \int\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+2\,\frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1}\right)'dx = \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{12}{11}x\sqrt[6]{x^5}+c$$

iv) Είναι:

$$\int (5\sigma\upsilon\nu x + \varepsilon\varphi^2 x)\, dx = \int \left(5\sigma\upsilon\nu x + \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) dx =$$

$$\int \left(5\sigma\upsilon\nu x + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) dx = \int \left(5\sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right) dx =$$

$$\int (5\eta\mu x - x + \varepsilon\varphi x)'\, dx = 5\eta\mu x - x + \varepsilon\varphi x + c \quad \text{όπου } c \text{ σταθερά}$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\alpha x + b}$ $\quad x \neq -\frac{b}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0$ **ii)** $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{2x^2 + 3}$

iii) $\displaystyle\int \varepsilon\varphi x\, dx$ **iv)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x + b}}$ $\quad \alpha \neq 0, \quad x \neq -\frac{b}{\alpha}$

ΛΥΣΗ

Ειναι:

i) $$\int \frac{dx}{\alpha x + b} = \int \frac{1}{\alpha}\frac{(\alpha x + b)'}{\alpha x + b}\, dx = \int \left(\frac{1}{\alpha} \ln|\alpha x + b|\right)' dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} \ln|\alpha x + b| + c \quad \text{όπου } c \text{ σταθερά.}$$

ii) $$\int \frac{x dx}{2x^2+3} = \int \frac{1}{4}\frac{(2x^2+3)'}{2x^2+3}\, dx = \int \left(\frac{1}{4} \ln(2x^2+3)\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|2x^2+3| + c, \quad c \text{ σταθερα}$$

iii) $$\int \varepsilon\varphi x\, dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\, dx = -\int \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}\, dx = \int (-\ln|\sigma\upsilon\nu x|)'\, dx =$$

$$= -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c \quad \text{όπου } c \text{ σταθερα.}$$

iv) $$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x + b}} = \int \frac{2}{\alpha}\frac{(\alpha x + b)'}{2\sqrt{\alpha x + b}}\, dx = \int \left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha x + b}\right)' dx =$$

$$= \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha x + b} + c \quad \text{όπου } c \text{ σταθερά.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τις αρχικές των συναρτήσεων

i) $f(x) = \frac{3x \;\; 1}{3x^2 \;\; 2x + 51}$

ii) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x}}$

iii) $f(x) = \frac{1 \;\; \ln x}{x^2}$

2. Να βρειτε τις αρχικές των συναρτήσεων,

i) $f(x) = x\, e^{x^2 + 1}$

ii) $f(x) \;\; e^{ημx}\, συνx$

iii) $f(x) = \frac{ημ6x}{4 + ημ^2 3x}$

iv) $f(x) = \frac{ημx}{\sqrt{συνx}}$

3. Να βρεθεί η εξίσωση των καμπύλων στις οποίες ο συντελεστής της εφαπτομένης σε κάθε σημείο είναι ίσος με το διπλάσιο της τετμημένης.

4. Να βρειτε τα ολοκληρώματα

i) $\int (2x^3 - 5x + 4)\, dx$

ii) $\int \frac{15x^2 + 1}{5x^3 + x + 4}\, dx$

iii) $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

iv) $\int (2x - 1)^5\, dx$

v) $\int \frac{x^2 dx}{8 \;\; x^3}\, dx$

vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\; συν^2\sqrt{x}}$

5. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\int (e^{αx} \;\; e^{\;αx})\, dx$

ii) $\int (α^x + α^{-x})\, dx$

iii) $\int (συναx + ημbx)\, dx$

iv) $\int \frac{1 + συνx}{x + ημx}\, dx$

6. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx$

ii) $\int (e^x + e^{-x})^2\, dx$

iii) $\int \left(συν3x \;\; ημ\frac{x}{3}\right) dx$

iv) $\int 10^{3x}\, dx$

v) $\int \frac{1}{x^2 - α^2}\, dx\,,\; α \neq 0$

vi) $\int \sqrt{1 + ημx}\, dx$

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρωματα

i) $\int \sqrt{1 + συνx}\, dx\,,\; 0 \leq x \leq π$

ii) $\int \frac{1}{συν^2 x \cdot \sqrt{εφx}}\, dx$

8. Να υπολογιστουν τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$ ii) $\int \frac{dx}{x(x + 2)}$

iii) $\int x^2 \sqrt[3]{4 - x^3}$ iv) $\int \frac{\sqrt{εφx}}{συν^2 x}\, dx$

9. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε να ισχύει

$$\int \frac{2x \quad 1}{x^3} e^{1 \quad \frac{1}{x}} dx = (\alpha + \frac{\beta}{x}) e^{1 \quad \frac{1}{x}}$$

10. Να βρείτε τη συναρτηση f αν

i) $f'(x) \quad e^x + συνx$ και $f(0) = 2$

ii) $f''(x) \quad 0$ και $f(1) \quad 2$ και $f(-1) \quad 4$

iii) $f''(x) \quad 1$ και $f'(0) \quad \frac{1}{2}$ και $f(1) \quad 1$

11. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, b, γ ώστε η συνάρτηση

$$F(x) = (\alpha x^2 + bx + \gamma)\sqrt{3 - 2x}$$

να είναι μια αρχικη της $f(x) = x\sqrt{3 - 2x}$.

12. Να προσδιοριστούν τα α και b ωστε η συνάρτηση

~~F(x) e^{-x}(ασυν4x + bημx)~~

$$h(x) = \begin{cases} e^{\frac{x \quad 1}{x}} & , \text{ αν } x \in (\ \infty, 1) \\ \frac{\ln^2 x}{x} & , \text{ αν } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

να είναι μια αρχική της $f(x) = e^{\ x}$συν4x.

13. Να βρεθουν οι συνεχείς συναρτήσεις στο R με την ιδιότητα: $f(x)\ F(-x) \ \ -\alpha$, για καθε $x \in R$ και $\alpha \in (0, \infty)$, όταν η F μια αρχική της f στο R.

14. Να βρείτε συνάρτηση f θετική για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f'(x) \quad \frac{x^2 + 1}{x} f(x) \quad **$$

και της οποίας η γραφικη παρασταση στο σημείο (1,f(1)) έχει συντελεστή διευθυνση 1.

15. Να βρεθεί συνάρτηση f με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in$ IR για την οποία έχουμε $f(1) = 0$

$$(1 + x^2)\, f'(x) = x\, f(x)$$

16. Έστω η συνάρτηση $f(x) \quad x + συνx$. Να βρεθει η αρχική αυτης F_0 της οποιας η τιμή για $x_0 = \pi/2$ είναι 1.

17. Να βρεθουν οι αρχικές συναρτησεις της συνάρτησης $f(x) \quad ημ2x + e^{-x}$, $x \in$ IR.

18. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Να βρεθουν οι αρχικές αυτης.

19. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν μη μηδενικές συναρτήσεις f με την ιδιότητα $F(x)\ F(1 - x) \quad F(x^2)$ όπου F μια αρχικη της f στο IR.

20. Εστω f μια συνάρτηση που έχει αρχικη στο IR που δεν ειναι " ενα προς ενα ". Να αποδείξετε ότι η f μηδενιζεται τουλαχιστον σε ένα σημείο.

1.6 Η ύπαρξη μιας αρχικής συνεχούς συνάρτησης

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ φραγμένο ή όχι και α ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό σημείο του Δ.

Σε κάθε x∈Δ αντιστοιχίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_\alpha^x f(t)\,dt$

Έτσι ορίζεται στο Δ μια συνάρτηση F με

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt \;,\quad x\in\Delta$$

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει αφενός την ύπαρξη μιας αρχικής συνάρτησης και αφετέρου μας δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού της για κάποιες συνεχείς συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Τη συνάρτηση $f(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$ την συναντήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο και μάλιστα αποδείξαμε ότι είναι συνεχής.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και α∈Δ τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$, x∈Δ είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο Δ, δηλαδή

$$F'(x)=f(x) \text{ για κάθε } x\in\Delta.$$

Απόδειξη

Ο λόγος μεταβολής της F μεταξύ των $x_0\in\Delta$ και $(x_0+h)\in\Delta$ είναι:

με $h\neq 0$, $$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_\alpha^{x+h} f(t)\,dt-\int_\alpha^{x} f(t)\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{h}\left[\int_\alpha^{x} f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt-\int_\alpha^{x} f(t)\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \qquad (1)$$

Σύμφωνα όμως με το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού υπάρχει ξ_h στο κλειστό διάστημα με άκρα τα x_0, x_0+h τέτοιο ώστε.

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(\xi_h)\,(x_o+h-x_0)=h\,f(\xi_h)$$

Επομένως η (1) γράφεται:

$$\frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h} = f(\xi_h) \qquad (2)$$

Οταν όμως $h \to 0$ επειδή $x_o \le \xi_h \le x_o + h$ ή $x_0 + h \le \xi_h < x_0$ θα είναι

$\lim\limits_{h \to 0} \xi_h = x_o$ και επειδή f συνεχής θα ισχύει $\lim\limits_{h \to 0} f(\xi_h) = f(x_o)$ οπότε από την (2)

έχουμε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x_o + h) - F(x_o)}{h} = f(x_o)$ δηλαδή $F'(x_o) = f(x_o)$.

Αρα η F είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

Παρατήρηση

- Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι: $\frac{d}{dx}\left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right) = f(x)$, $x \in \Delta$

- Στα προηγούμενα οι έννοιες ορισμένο ολοκλήρωμα και αρχική συνάρτηση ορίστηκαν με εντελώς διαφορετικούς τρόπους.
  Έχει σημασία όμως να τονιστεί ότι προκειμένου για συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ οι δύο αυτές έννοιες συνδέονται μεταξύ τους (όπως αποδεικνύει το προηγούμενο θεώρημα).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Στο σχολικό βιβλίο όλες οι προτάσεις που αναφέρονται στο ορισμένο ολοκλήρωμα προϋποθέτουν ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα [α, b]. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα που πολλές φορές τίθεται (είτε συναντάται σε κάποια πραγματι "κο,ι,νη" άσκηση) " αν έχει νόημα το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ " όταν f συνεχής στο (α, b) , παραθέτουμε χωρίς απόδειξη την πρόταση.

Αν f συνεχής και υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $A \subset [\alpha, b]$ έτσι ώστε, για κάθε $x \in [\alpha, b] \setminus A$ να είναι $f(x) = g(x)$ τότε:
Η g είναι ολοκληρώσιμη στο [α, b] και ισχύει $\int_\alpha^b g(x)\,dx = \int_\alpha^b f(x)\,dx$

Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν F είναι μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα Δ και α, β ∈ Δ τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το θεώρημα (1), μια αρχική της f στο Δ είναι $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$.

Επομένως υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = F(x) + c \qquad (1)$$

Για $x = \alpha$ π ουμε $0 \quad \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt \quad F(\alpha) + c$ δηλαδή $c \; \text{-} \; F(\alpha)$

οπότε η (1) γράφεται. $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt \quad F(x) \quad F(\alpha)$

Απο την τελευταία ισότητα για $x = \beta$ παιρνουμε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = F(\beta) - F(\alpha)$

- Συνηθως για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας συμβολίζουμε :

$F(\beta) \quad F(\alpha) \quad [f(x)]_{\alpha}^{\beta}$ οπότε η ισότητα του θεωρήματος γράφεται

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta}}$$

Παρατήρηση

Το θεμελιωδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμου μας δίνει μια μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων όταν γνωρίζουμε μια οποιαδηποτε αρχική συνάρτηση της f και είναι γνωστό ως θεώρημα Leibniz - Newton

ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩ - ΜΑΤΟΣ ΩΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΕΙΩΔΟΥΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Αν δεχτούμε " αξιωματικά " την αλήθεια του θεμελειώδους θεωρήματος μπορουμε να αποδείξουμε με τη βοήθεια αυτού, τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρωματος .

- **Εστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ και $\alpha, b, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει :**

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\gamma} f(t)\,dt + \int_{\gamma}^{b} f(t)\,dt$$

Απόδειξη

Εστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο Δ . Έχουμε τότε:

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)\,dt \quad F(b) - F(\alpha) \quad F(b) \quad F(\gamma) + F(\gamma) \quad F(\alpha)$$

Είναι όμως $F(b) - F(\gamma) = \int_{\gamma}^{b} f(t)\, dt$ και $F(\gamma) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(t)\, dt$.

Επομένως $\int_{\alpha}^{b} f(t)\, dt = \int_{\alpha}^{\gamma} f(t)\, dt + \int_{\gamma}^{b} f(t)\, dt$

Παρατήρηση

1) Η σχέση αυτή είναι αντίστοιχη της σχέσης Chasles που ισχύει στα διανύσματα και λέγεται και σχέση Chasles στον ολοκληρωτικό λογισμό.
2) Η παραπάνω ιδιότητα γενικεύεται ως εξής.
Αν θέσουμε $\alpha = \gamma_0$, $b = \gamma_{\nu+1}$ και $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_\nu$ είναι σημεία του διαστήματος (α, b) τότε η f είναι συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[\gamma_i, \gamma_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, ..., \nu$ και μπορούμε εύκολα επαγωγικά να αποδείξουμε ότι:

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)\, dt = \sum_{i=0}^{\nu} \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} f(t)\, dt$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

● **Εστω f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, b]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει:**

$$\int_{\alpha}^{b} [(\lambda f + \mu g)(x)]\, dx = \lambda \int_{\alpha}^{b} f(x)\, dt + \mu \int_{\alpha}^{b} g(x)\, dt$$

Απόδειξη

Εστω F, G δυο αρχικές συναρτήσεις των f, g στο διάστημα $[\alpha, b]$. Τότε η συνάρτηση $\lambda F + \mu G$ είναι μια αρχική συνάρτηση της $\lambda f + \mu g$ στο $[\alpha, b]$ (προφανώς).

Εχουμε :

$$\int_{\alpha}^{b} [(\lambda f + \mu g)(x)]\, dx = (\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(\alpha)$$

$$= \lambda F(b) + \mu G(b) - \lambda F(\alpha) - \mu G(\alpha)$$

$$= \lambda [F(b) - F(\alpha)] + \mu [G(b) - G(\alpha)]$$

$$= \lambda \int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx + \mu \int_{\alpha}^{b} g(x)\, dx$$

Παρατήρηση

Για $\mu = 0$ έχουμε τη γνωστή σχέση : $\int_{\alpha}^{b} \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

- **Εστω f συνεχής συνάρτηση στο [α, b] με f(x) > 0 για κάθε x∈ [α, b] τότε ισχύει :**

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx \geq 0 .$$

Απόδειξη

Εστω F μια αρχική της f στο [α,b]. Επειδή είναι F (x) = f(x) > 0 για καθε x∈ [α, b] η F θα ειναι αύξουσα στο [α, b] άρα για α ≤ b θα είναι F(α) ≤ F(b) και επειδη

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx = F(b) - F(\alpha) \quad \text{έχουμε} \quad \int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx \geq 0 .$$

Παρατήρηση

Οι άλλες ιδιότητες της μονοτονίας αποδεικνύονται οπως είναι γνωστό με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Εστω f συνεχής συνάρτηση στο [α, b] τότε υπάρχει c∈ [α, b] με την ιδιότητα

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx = (b - \alpha)\, f(c)$$

Απόδειξη

Έστω $F(x)\ \int_{\gamma}^{x} f(t)\, dt$ μια αρχική της f στο [α, b] , γ∈[α, b .

Η F ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στο [α, b] άρα υπαρχει c∈ (α, b) τέτοιο ώστε :

$$\frac{F(b)\ \ F(\alpha)}{b\ \ \alpha} = F'(c) \quad \text{ή} \quad F(b) - F(\alpha)\ \ (b\ \ \alpha)\, F'(c) \quad \text{ή}$$

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)\, dt\ \ (b\ \ \alpha)\, f(c) .$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής με αυτόν τον τροπο δικαιολογεί πλήρως το ότι c∈ (α, b) χωρίς βέβαια να αποκλείει και την υπαρξη c∈ [α, b] με την ίδια ιδιοτητα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

i) $f(x) = \int_1^x (\ln t + t)\, dt$, $x > 0$ **ii)** $f(x) = \int_x^0 \frac{t}{e^t}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = \int_1^{x^2} t\, ημt\, dt$, $x \in \mathbb{R}$ **iv)** $f(x) = \int_1^{x^2+1} t \ln t\, dt$, $x > 0$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση $\ln x + x$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ οπότε η f είναι μια αρχική αυτής στο $(0, +\infty)$. Συνεπώς θα είναι $f΄(x) = \ln x + x$, $x > 0$.

ii) Η συνάρτηση x / e^x είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι μια αρχική αυτής στο $\mathbb{R}$ επομένως

$$f΄(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_x^0 \frac{t}{e^t}\, dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_0^x \frac{t}{e^t}\, dt\right) = -\frac{x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_1^x t\, ημt\, dt$ και επειδή η συνάρτηση $x ημx$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η g είναι μια αρχική αυτής, συνεπώς $g΄(x) = x\, ημx$.

Είναι όμως :

$f(x) = g(x^2)$ οπότε $f΄(x) = g΄(x^2) \cdot (x^2)΄$ ή $f΄(x) = x^2 ημx^2 (2x) = 2x^3 ημx^2$.

iv) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_1^x t \ln t\, dt$, $x > 0$ η οποία είναι μια αρχική της $x \ln x$ στο $(0, +\infty)$ άρα $g΄(x) = x \ln x$. Είναι όμως.

$f(x) = g(x^2 + 1)$ οπότε $f΄(x) = g΄(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)΄$ ή

$$f΄(x) = 2x\left[(x^2 + 1) \ln (x^2 + 1)\right]$$

Παρατήρηση SOS

- Αν $G(x) = \int_α^{φ(x)} f(t)\, dt$ όπου $φ(x)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, f συνεχής και $g(x) = \int_α^x f(t)\, dt$ τότε ισχύει $G΄(x) = g΄(φ(x)) \cdot φ΄(x)$.

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

i) $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} συν^2t\, dt\ ,\quad x>0$ **ii)** $f(x) = \int_{x}^{x+1} \frac{1}{1+ημ^2t}\, dt,\quad x\in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_{α}^{x} συν^2t\, dt,\ x>0$ α τυχαιο σταθερό σημειο του $(0,+\infty)$.

Η g είναι μια αρχική της $συν^2x$ στο $(0,+\infty)$ άρα παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = συν^2x$.

Η f γράφεται:

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{α} συν^2t\, dt + \int_{α}^{\sqrt{x}} συν^2t\, dt \quad ή$$

$$f(x) = -\int_{α}^{\frac{1}{x}} συν^2t\, dt + \int_{α}^{\sqrt{x}} συν^2t\, dt$$

άρα $f(x) = -g\left(\frac{1}{x}\right) + g(\sqrt{x}\,)$ από την οποια έχουμε

$$f'(x) = -g'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' + g'(\sqrt{x}\,)\cdot(\sqrt{x}\,)' \quad ή$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(-συν^2\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,συν^2\sqrt{x} \quad ή$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\,συν^2\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,συν^2\sqrt{x}$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_{α}^{x} \frac{1}{1+ημ^2t}\, dt$ $x\in\mathbb{R}$ και α σταθερο (αλλά τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}$). Η g είναι μια αρχική της $\frac{1}{1+ημ^2x}$ στο $\mathbb{R}$ συνεπώς $g'(x) = \frac{1}{1+ημ^2x}$.

Η f γραφεται : $f(x) = \int_{x}^{α} \frac{1}{1+ημ^2t}\, dt + \int_{α}^{x+1} \frac{1}{1+ημ^2t}\, dt$ ή

$$f(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{1+\eta\mu^2 t}\,dt + \int_{\alpha}^{x+1} \frac{1}{1+\eta\mu^2 t}\,dt$$ συνεπώς είναι

$f(x) = g(x) + g(x+1)$ από την οποία έχουμε:

$f'(x) = g'(x) + g'(x+1)\cdot(x+1)'$ ή

$f'(x) = g'(x) + g'(x+1)$ ή $f'(x) = \dfrac{1}{1+\eta\mu^2 x} + \dfrac{1}{1+\eta\mu^2 (x+1)}$

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i) $F(x) = \int_0^x x\, f(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}$ **όπου f συνεχής στο** $\mathbb{R}$.

ii) $F(x) = \int_1^{x+1} x^2 \ln t\, dt$, $x > 0$.

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση F γράφεται: $F(x) = x\int_0^x f(t)\,dt$

Θεωρούμε τη συναρτηση $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ η οποία ειναι μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$

αρα $g'(x) = f(x)$.

Ειναι όμως : $F(x) = x\cdot g(x)$ άρα $F'(x) = (x)'g(x) + xg'(x)$.

Συνεπώς $F'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x)$.

ii) Η συνάρτηση F γράφεται: $F(x) = x^2\int_1^{x+1} \ln t\,dt$.

Θεωρουμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \ln t\,dt$ η οποία είναι μια αρχική της lnx

στο $(0, +\infty)$ άρα $g'(x) = \ln x$.

Εχουμε τωρα:

$F(x) = x^2 g(x+1)$ άρα $F'(x) = (x^2)'g(x+1) + x^2 g'(x+1)(x+1)'$

η $F'(x) = 2x\, g(x+1) + x^2\ln(x+1)$ ή $F'(x) = 2x\int_1^{x+1} \ln t\,dt + x^2\ln(x+1)$

Εφαρμογή 4

Έστω συνάρτηση f(x) παραγωγίσιμη στο IR. Να υπολογιστεί η f΄ όταν ισχύει

$$\int_0^{f(x)} e^t\,dt + \int_0^x \sigma\upsilon\nu t\,dt = 0$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_\alpha^x e^t\,dt$. Επειδή η e^x είναι συνεχής στο IR θα έχουμε $g'(x) = e^x$. Όμοια $\left(\int_0^x \sigma\upsilon\nu t\,dt\right)' = \sigma\upsilon\nu x$

Θέτουμε $F(x) = \int_0^{f(x)} e^t\,dt + \int_0^x \sigma\upsilon\nu t\,dt$. Έχουμε $F(x) = g(f(x)) + \int_0^x \sigma\upsilon\nu t\,dt$

Επομένως:

$$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) + \sigma\upsilon\nu x \quad \text{ή} \quad F'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) + \sigma\upsilon\nu x.$$

Επειδή $F(x) = 0$ θα είναι $F'(x) = 0$ άρα

$$e^{f(x)} f'(x) + \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \text{ή} \quad f'(x) = \frac{-\sigma\upsilon\nu x}{e^{f(x)}}.$$

Παρατήρηση

Ο κανόνας της αλυσίδας σε συναρτήσεις της μορφής $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε συντομότερα και εποπτικότερα την παράγωγο της F.

Εφαρμογή 5

Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$y(t) = \int_0^{t^2-3} \sqrt[3]{x^2+1}\,dx \quad t \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

Ζητούμε να προσδιορίσουμε την $\frac{dy}{dt}$.

Θέτουμε $t^2 - 3 = u$ οπότε έχουμε $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}$.

Είναι $\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}\left(\int_0^u \sqrt[3]{x^2+1}\,dx\right) = \sqrt[3]{u^2+1}$.

$$\frac{du}{dt} = 2t \quad \text{άρα} \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{(t^2-3)^2+1} \cdot 2t.$$

Εφαρμογή 6

Να υπολογίσετε την $\frac{d}{dt}\left[\int_{t^2}^{t^3}\frac{1}{4+3x^2}\,dx\right]$.

ΛΥΣΗ

Το ολοκλήρωμα γράφεται $\int_{t^2}^{t^3}\frac{1}{4+3x^2}dx = \int_{0}^{t^3}\frac{1}{4+3x^2}dx + \int_{t^2}^{0}\frac{1}{4+3x^2}dx$

$$= \int_{0}^{t^3}\frac{1}{4+3x^2}dx - \int_{0}^{t^2}\frac{1}{4+3x^2}dx \qquad (1)$$

Αν θέσουμε $u = t^3$ και $\upsilon = t^2$ τότε η (1) γράφεται:

$$\int_{t^2}^{t^3}\frac{1}{4+3x^2}dx = \int_{0}^{u}\frac{1}{4+3x^2}dx - \int_{0}^{\upsilon}\frac{1}{4+3x^2}dx$$

και συνεπώς:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{t^2}^{t^3}\frac{1}{4+3x^2}dx\right] = \frac{d}{du}\left(\int_{0}^{u}\frac{1}{4+3x^2}dx\right)\cdot\frac{du}{dt} - \frac{d}{d\upsilon}\left[\int_{0}^{\upsilon}\frac{1}{4+3x^2}dx\right]\frac{d\upsilon}{dt}$$

$$= \frac{1}{4+3u^2}\cdot 3t^2 - \frac{1}{4+3\upsilon^2}\cdot 2t = \frac{3t^2}{4+3t^6} - \frac{2t}{4+3t^4}$$

Εφαρμογή 7

Να βρείτε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [0, π/ 2] και για την οποια ισχύει: $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \eta\mu x - \frac{1}{2}$ **. Ποια πρέπει να είναι η τιμή του α;**

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι συνεχης στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα η συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = f(x)$. Από την ισότητα

$$g(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \eta\mu x - \frac{1}{2} \quad \text{έχουμε : } g'(x) = \left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right)' \ \text{ή}\ f(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ επαληθεύει τη σχέση $\int_{\alpha}^{x} \sigma\upsilon\nu t\,dt = \eta\mu x - \frac{1}{2}$

Η σχέση αυτη για $x = α$ γίνεται

$$0 - ημα - \frac{1}{2} \quad ή \quad ημα \quad \frac{1}{2} \quad αρα \quad α = \frac{\pi}{6} \ .$$

Εφαρμογή 8

Να βρεθεί συνάρτηση f με $f(x) \neq 0$ και παραγωγίσιμη με πεδίο ορισμού το $(3/2, +\infty)$ όταν

$$\mathbf{f(x) = 2 + \int_1^x f^2(t)\, dt \qquad (1)}$$

ΛΥΣΗ

Από την (1) εχουμε: $f'(x) = f^2(x)$ ή $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int 1dx$ ή

$$\int \left(\frac{1}{f(x)} \right)' dx = \int 1dx \quad ή \quad \frac{1}{f(x)} = x + c \quad ή \quad f(x) = -\frac{1}{x + c} \qquad (2)$$

Η (1) για $x = 1$ δίνει $f(1) = 2$. Από την (2) έχουμε $f(1) = -\frac{1}{1+c}$.

Άρα $2 = \frac{1}{1+c}$ ή $2+2c = -1$ ή $c = \frac{3}{2}$ επομενως $f(x) \ \frac{-2}{2x-3}$

Εφαρμογή 9

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$\mathbf{\int_0^{ημx} f(t)\, dt = \sqrt{3}\ x^2 + 1}$$

να βρείτε την τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

ΛΥΣΗ

Θετουμε $F(x) = \int_0^{ημx} f(t)\, dt$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) \ \int_0^x f(t)\, dt$. Επειδή f συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει $g'(x) \ f(x)$.

Είναι : $F(x) \ g(ημx)$ άρα $F'(x) = g'(ημx) \cdot (ημx)' = συνx \cdot f(ημx)$.

Είναι ακόμη $F(x) = \sqrt{3}\, x^2 + 1$ ή $F'(x) \ 2\sqrt{3}\, x$, επομένως $συνx \ f(ημx) \ 2\sqrt{3}\, x$, από την οποία για $x \ \frac{\pi}{6}$ έχουμε

$$συν\frac{\pi}{6}\, f\left(ημ\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\ \frac{\pi}{6} \quad ή \quad \frac{\sqrt{3}}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\ \frac{\pi}{3} \quad ή \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Εφαρμογή 10

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)\, dx$

iii) $\int_{-2}^{-1} \left(3 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ iv) $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

v) $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu 3x \ dx$ vi) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx$

ΛΥΣΗ

i) Είναι $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1} + 2x\right]_1^2 = \frac{29}{6}$

ii) Είναι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu 2x\, dx = \left[\frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\eta\mu\pi - \eta\mu 0) = 0$

iii) Είναι $\int_{-2}^{-1} \left(3 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_{-2}^{-1} \left(9 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx =$

$\left[9x + 6\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-2}^{-1} = \frac{19}{2} - 6\ln 2$

iv) Είναι $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \frac{10}{3}\sqrt{2} - \frac{8}{3}$

v) Είναι $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu 3x\, dx = \left[\frac{\eta\mu 3x}{3}\right]_0^{\pi} = 0$

vi) Είναι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx = \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$

Εφαρμογή 11

Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}\,, & x\in [0,1] \\ 2x+1\,, & x\in [-1,\,0) \end{cases}$

Να αποδειχθεί ότι είναι συνεχής και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο (0, 1] ως ρίζα συνεχούς συναρτήσεως και συνεχης στο [-1, 0) ως πολυωνυμική.

Είναι $f(0) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+1} = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x+1) = 1$

αρα η f είναι συνεχής και στο 0 συνεπώς f συνεχής στο [-1, 1] άρα ολοκληρωσιμη σ' αυτό.

Είναι $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx =$

$$\int_{-1}^{0}(2x+1)\,dx + \int_{0}^{1}\sqrt{x+1}\,dx = \left[x^2+x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt[2]{(x+1)^3}\right)\right]_{0}^{1} =$$

$$\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Εφαρμογή 12

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx$ β) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|\,dx$

ΛΥΣΗ

α) Όταν $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ είναι $|x^2-1| = x^2-1$ και οταν $x\in[-1,1]$ είναι $|x^2-1| = -(x^2-1)$. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι στο διάστημα [-2, -1] είναι $|x^2-1| = x^2-1$.

Στο διάστημα [-1, 1] είναι $|x^2-1| = -(x^2-1)$ και

Στο διάστημα [1, 2] είναι $|x^2-1| = x^2-1$.

Ακόμη η x^2-1 είναι συνεχης στο ℝ αρα και στο [-2, 2] και συνεπώς και η $|x^2-1|$ είναι συνεχής στο [-2, 2].

Εχουμε τωρα

$$\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\, dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx + \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} = 4$$

β) Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ είναι $\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$ και για $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $\eta\mu x \geq \sigma\upsilon\nu x$.

Αφού η η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και η $|g(x)| = |\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Εχουμε λοιπόν :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)\, dx =$$

$$\left[\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

Εφαρμογή 13

Να αποδείξετε ότι : **i)** $\displaystyle\int_\alpha^b \left(\int_\alpha^x (1+t)\, dz\right) dx = \frac{(1+t)(b-\alpha)^2}{2}$

ii) $\displaystyle\int_\alpha^b \left(\int_\alpha^x \left(\int_\alpha^b 1 dz\right) dy\right) dx = \frac{(b-\alpha)^3}{2}$

ΛΥΣΗ

i) Είναι $\displaystyle\int_\alpha^x (1+t)\, dz = (1+t)\int_\alpha^x 1 dz = (1+t)\left[z\right]_\alpha^x = (1+t)(x-\alpha)$

Επομενως

$$\int_\alpha^b \left(\int_\alpha^x (1+t)\, dz\right) dx = \int_\alpha^b (1+t)(x-\alpha)\, dx = (1+t)\int_\alpha^b (x-\alpha)\, dx =$$

$$(1+t)\left[\frac{x^2}{2} - \alpha x\right]_\alpha^b = \frac{(1+t)(b-\alpha)^2}{2}$$

ii) Είναι $\displaystyle\int_\alpha^b 1 dz = (b-\alpha)$ άρα $\displaystyle\int_\alpha^x \left(\int_\alpha^b 1 dz\right) dy =$

$$\int_\alpha^x (b-\alpha)\, dy = (b-\alpha)\int_\alpha^x 1 dy = (b-\alpha)(x-\alpha) \text{ επομένως}$$

$$\int_\alpha^b\left(\int_\alpha^x\left(\int_\alpha^b dz\right)dy\right)dx=\int_\alpha^b(b-\alpha)(x-\alpha)\,dx=(b-\alpha)\int_\alpha^b(x-\alpha)\,dx=$$

$$=(b-\alpha)\left[\frac{x^2}{2}-\alpha x\right]_\alpha^b=(b-\alpha)\left(\frac{b^2}{2}-\alpha b-\frac{\alpha^2}{2}+\alpha^2\right)=$$

$$=(b-\alpha)\left(\frac{b^2}{2}-\alpha b+\frac{\alpha^2}{2}\right)=(b-\alpha)\left(\frac{b^2-2\alpha b+\alpha^2}{2}\right)=\frac{(b-\alpha)^3}{2}$$

Εφαρμογή 14

Να βρεθεί $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\int_\alpha^{\alpha+1}(x^3+4x)\,dx=\frac{25}{2}\qquad(1)$$

ΛΥΣΗ

Η (1) γράφεται $2\int_\alpha^{\alpha+1}(x^3+4x)=25$ ή

$2\left[\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_\alpha^{\alpha+1}=25$ ή $\frac{1}{2}\left[(\alpha+1)^4-\alpha^4\right]+8(\alpha+1-\alpha)=25$ ή

$(\alpha+1)^4-\alpha^4+16=50$ ή $\alpha^4+4\alpha^3+6\alpha^2+4\alpha+1-\alpha^4-34=0$ ή

$4\alpha^3+6\alpha^2+4\alpha-33=0$ ή $\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)(4\alpha^2+12\alpha+22)=0$ ή

Άρα $\alpha=\frac{3}{2}$. Η εξίσωση $4\alpha^2+12\alpha+22=0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ γιατί έχει $\Delta<0$.

Εφαρμογή 15

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $-e^{-x}-xe^{-x}$ και μετά να υπολογιστούν τα όρια.

i) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_0^\alpha e^{-x}x\,dx$ **ii)** $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^\alpha e^{-x}x\,dx$

ΛΥΣΗ

Είναι $(-e^{-x}-x\cdot e^{-x})'=-e^{-x}(-x)'-e^{-x}-x\cdot e^{-x}(-x)'=$

$=e^{-x}-e^{-x}+x\cdot e^{-x}=x\cdot e^{-x}$.

που σημαίνει ότι μια αρχική της xe^{-x} είναι η $-e^{-x}-xe^{-x}$

άρα $\int_0^\alpha xe^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}-xe^{-x}\right]_0^\alpha=$

$$= -e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha} + 1 = -\frac{1}{e^{\alpha}} - \frac{\alpha}{e^{\alpha}} + 1 = \frac{-\alpha - 1}{e^{\alpha}} + 1 \quad \text{επομένως}$$

i) $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} x\, e^{-x}\, dx = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{-\alpha - 1}{e^{\alpha}} + 1 = 1$

γιατί με L' Hospital εχουμε : $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{-\alpha - 1}{e^{\alpha}} = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{-1}{e^{\alpha}} = 0.$

ii) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_0^{\alpha} e^{-x}\, x\, dx = \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{-\alpha - 1}{e^{\alpha}} + 1 = -1 + 1 = 0$

Εφαρμογή 16

Έστω δύο πολυώνυμα με ρητούς συντελεστές P(x) και g(x) με $g(x) \neq 0$.

i) Να δειχθεί ότι αν το g(x) είναι διαιρέτης του P(x) τότε

$$\int_0^1 \frac{P(x)}{g(x)}\, dx \in Q$$

ii) Η αντίστροφη πρόταση αληθεύει ;

ΛΥΣΗ

Αφού το g(x) είναι διαιρέτης του P(x) υπάρχει πολυώνυμο φ(x) τέτοιο, ωστε $P(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$.

Το φ(x) είναι της μορφής:

$$\varphi(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0\,, \quad \text{όπου } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu \in Q$$

και βαθμ. φ(x) + βαθμ· g(x) = βαθμ. P(x)

$$\text{Άρα} \quad \int_0^1 \frac{P(x)}{g(x)}\, dx = \int_0^1 \frac{g(x) \cdot \varphi(x)}{g(x)}\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx =$$

$$\int_0^1 (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0)\, dx =$$

$$\frac{\alpha_\nu}{\nu+1} + \frac{\alpha_{\nu-1}}{\nu} + \dots + \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_0 \in Q$$

διοτι $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_\nu \in Q$ και $\nu \in N$.

ii) Η αντίστροφη πρόταση δεν αληθεύει

Για παράδειγμα αν $P(x) = +2x$, $g(x) = (1 + x^2)^2$.

Ειναι $\int_0^1 \frac{P(x)}{g(x)}\, dx = \int_0^1 \frac{+2x}{(1+x^2)^2}\, dx = \left[\frac{-1}{1+x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \in Q$ και g(x) δεν διαιρεί P(x).

Εφαρμογή 17

Να αποδειχθεί ότι αν f συνεχής συνάρτηση στο [0, 1] και υπάρχει $\nu \in N^*$ τέτοιο ώστε :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\nu}, \quad \nu > 1 \quad \text{τότε υπάρχει}$$

$$x_0 \in (0,1) \ \text{με} \ f(x_0) = \frac{1 - x_0^{\nu}}{1 - x_0}.$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε στο [0, 1] τη συνάρτηση (συνεχής)

$$g(x) = f(x) - (1 + x + x^2 + \dots + x^{\nu-1}) \quad (1). \quad \text{Τότε.}$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (1 + x + \dots + x^{\nu-1})\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \left[x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{\nu}}{\nu}\right]_0^1 =$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\nu}\right) = 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού υπάρχει

$$x_0 \in (0, 1) \ \text{με} \ g(x_0)(1 - 0) = \int_0^1 g(x)\,dx = 0$$

και άρα από την (1) έχουμε :

$$f(x_0) = 1 + x_0 + \dots + x_0^{\nu-1} = \frac{1 - x_0^{\nu}}{1 - x_0}.$$

Εφαρμογή 18

Εστω f μια συνεχής συνάρτηση στο [0,1] με

$$\int_x^1 f(t)\,dt \geq \frac{1 - x^2}{2} \quad \text{για κάθε} \ x \in [0,1].$$ **και F μια αρχική της f στο [0,1] . Να αποδείξετε ότι**

1) $F(1) = \int_0^1 x\,f(x)\,dx + \int_0^1 F(x)\,dx$

2) $\int_0^1 x\,f(x)\,dx \geq \frac{1}{3}$

3) $\int_x^1 f^2(x)\,dx \geq \frac{1}{3}$

ΛΥΣΗ

1) Είναι : $[x F(x)]' = x f(x) + F(x)$ άρα

$$\int_0^1 [x F(x)]' dx = \int_0^1 x f(x) dx + \int_0^1 F(x) dx \text{ ή}$$

$$[x F(x)]_0^1 = \int_0^1 x f(x) dx + \int_0^1 F(x) dx \text{ ή}$$

$$F(1) = \int_0^1 x f(x) dx + \int_0^1 F(x) dx$$

2) Είναι $\int_x^1 f(t)\, dt = F(1) - F(x) \geq \frac{1-x^2}{2}$ άρα

$$\int_0^1 F(1)\, dx - \int_0^1 F(x)\, dx \geq \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} dx = \frac{1}{3} \text{ ή}$$

λόγω του 1) ερωτήματος $\int_0^1 x f(x)\, dx \geq \frac{1}{3}$

3) Ισχύει προφανώς : $(f(x)-x)^2 \geq 0$ ή $f^2(x) \geq 2x f(x) - x^2$ επομένως :

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx \geq 2\int_0^1 x f(x)dx - \int_0^1 x^2 dx \geq \frac{2}{3} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Εφαρμογή 19

Έστω το ολοκλήρωμα $J(x) = \int_x^{2x} \frac{συν2t}{t} dt,\ x \neq 0$.

Να βρεθεί το όριο : $\lim_{x \to 0} J(x)$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει : $\frac{συν2t}{t} = \frac{1-2ημ^2t}{t}$ επομένως

$$J(x) = \int_x^{2x} \frac{1-2ημ^2t}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt - 2\int_x^{2x} \frac{ημ^2t}{t} dt \quad (1)$$

Είναι $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_x^{2x} = \ln2|x| - \ln|x| = \ln\frac{2|x|}{|x|} = \ln2.$

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού υπάρχει $c_x \in [x, 2x]$ τέτοιο ώστε :

$I(x) = (2x - x)\cdot f(c_x)$ όπου f η συνάρτηση $f(t) = \dfrac{\eta\mu^2 t}{t}$ ή $I(x) = x\dfrac{\eta\mu^2 c_x}{c_x}$.

Όταν $x \to 0$ προφανώς και $c_x \to 0$. Έχουμε $\lim\limits_{c_x \to 0} \dfrac{\eta\mu^2 c_x}{c_x} = \lim\limits_{c_x \to 0} \dfrac{\eta\mu^2 c_x}{c_x^2} \cdot c_x = 0$.

Επομένως $\lim\limits_{x \to 0} I(x) = 0$.

Από την (1) έχουμε $J(x) = \ln 2 - 2I(x)$ συνεπώς $\lim\limits_{x \to 0} J(x) = \ln 2$.

Εφαρμογή 20

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές και "βαθμός $P(x)$ " ≥ 2. Αν $P'(x) > 0$ και $P(0) = 0$, , $P(1) = 1$ να αποδείξετε ότι :

$$1 < \int_0^1 \left[P'(x) + x\,P(x)\right] dx \leq \sqrt{e}\ .$$

ΛΥΣΗ

Η πολυωνυμική συνάρτηση P και η παράγωγος P΄ αυτής είναι συνεχείς στο ℝ άρα και στο [0, 1].

Ισχύει $P'(x) + xP(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right)'$ οπότε

$$\int_0^1 \left[P'(x) + xP(x)\right] dx = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right]' dx = I$$

Όταν $x \in [0,1]$ είναι $-\dfrac{1}{2} \leq -\dfrac{x^2}{2} \leq 0$ άρα $e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \leq e^0$ ή $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \leq 1$

Είναι όμως $P'(x) > 0$ συνεπώς η P είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $P(0) = 0$ θα είναι $P(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$ επομένως

$xP(x) + P(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ άρα $\left[e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right]' > 0$.

Έχουμε λοιπόν $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \left[e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right]' \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right]' \leq \left[e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right]'$

$$\text{άρα}\ \frac{1}{\sqrt{e}} \int_0^1 \left[e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right]' dx \leq \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right]' dx \leq \int_0^1 \left[e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right]' dx$$

$$\text{ή}\ \frac{1}{\sqrt{e}} \left[e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right]_0^1 \leq I \leq \left[e^{\frac{x^2}{2}} P(x)\right]_0^1 \quad \text{ή}$$

$$\text{ή}\ \frac{1}{\sqrt{e}} \left[e^{\frac{1}{2}} P(1) - P(0)\right] \leq I \leq e^{\frac{1}{2}}(P(1) - P(0)) \ \text{ ή }\ \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{e} \leq I \leq \sqrt{e}$$

ή $\quad 1 < \int_0^1 \left[P'(x) + xP(x)\right] dx \le \sqrt{e}$

Εφαρμογή 21

Έστω συνάρτηση f θετική και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [0, t].

Αν $L(t) = \int_0^t \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\, dx$ **και** $S(t) = \int_0^t f(x)\, dx$

να αποδείξετε ότι $L'(t)\, L''(t) = S''(t)\, S'''(t)$.

ΛΥΣΗ

Επειδή f δυο φορές παραγωγίσιμη στο [0, t] θα είναι και συνεχής. Άρα :

$$L'(t) = \sqrt{1+f'(t)^2} \quad \text{και} \quad L''(t) = \frac{2f''(t)\, f'(t)}{2\sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}} \quad \text{επομένως}$$

$$L'(t)\, L''(t) = f'(t)\, f''(t) \qquad (1).$$

Είναι $S'(t) = f(t)$ άρα $S''(t) = f'(t)$ και $S'''(t) = f''(t)$

Επομένως $\quad S''(t)\, S'''(t) = f'(t)\, f''(t) \qquad (2)$

Από τις (1) και (2) έχουμε : $L'(t)\, L''(t) = S''(t)\, S'''(t)$

Εφαρμογή 22

Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

ΛΥΣΗ

Για να μελετήσουμε τη μονοτονία της F στο $\mathbb{R}$ αναζητούμε το πρόσημο της F′ στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ η οποία είναι αρχική της $\frac{1}{1+x^2}$ στο $\mathbb{R}$ άρα $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Ισχυει: $F(x) = g(x^2)$ άρα $F'(x) = g'(x)\cdot(x^2)'$ ή $F'(x) = 2x\,\frac{1}{1+x^4}$.

Είναι $F'(x) > 0$ για $x > 0$ και $F'(x) < 0$ για $x < 0$ άρα, η F είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.(F συνεχής στο $\mathbb{R}$)

Εφαρμογή 23

Να υπολογίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης.

$$F(x) = \int_1^x (t-\alpha)\,(t-b)\,dt\,, \quad x\in\mathbb{R} \quad \alpha<b.$$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x) = (x-\alpha)\cdot(x-b)$. Η F' έχει ρίζες $x_1 = \alpha$, $x_2 = b$ προφανώς. Έχουμε :

$$F''(x) = (x-b) + (x-\alpha)$$

- για $x_1 = \alpha$ είναι $F''(\alpha) = \alpha - b < 0$ άρα για $x = \alpha$ η F έχει τ. μέγιστο ίσο με $F(\alpha)$
- για $x_2 = b$ είναι $F''(b) = b - \alpha > 0$ άρα για $x = b$ η F έχει τ. ελάχιστο ίσο με $F(b)$

Είναι $F(\alpha) = \int_0^\alpha (t-\alpha)(t-b)\,dt = \int_0^\alpha \left[t^2 - (\alpha+b)t + \alpha b\right] dt$

$$= \int_0^\alpha t^2\,dt - (\alpha+b)\int_0^\alpha t\,dt + \alpha b\int_0^\alpha 1\,dt$$

$$= \frac{\alpha^3}{3} - (\alpha+b)\frac{\alpha^2}{2} + \alpha^2 b.$$

Όμοια βρίσκουμε ότι $F(b) = = \frac{b^3}{3} - (\alpha+b)\frac{b^2}{3} + \alpha b^2$.

Εφαρμογή 24

Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων στα οποία η f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο όταν

$$f(x) = \int_0^x e^{t^4}\,(t^2 - 3t + 2)\,dt\,.$$

ΛΥΣΗ

Η f είναι μια αρχική της συνάρτησης $g(x) = e^{x^4}(x^2 - 3x + 2)$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η f παρουσιάζει ακρότατα θα αναζητηθούν στις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

Είναι $f'(x) = e^{x^4}(x^2 - 3x + 2)$.

Ρίζες της f' :

$$f'(x) = 0 \text{ ή } e^{x^4}(x^2 - 3x + 2) = 0 \text{ ή } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ άρα } x = 1 \text{ και } x = 2.$$

Είναι ακόμη: $f''(x) = e^{x^4}(4x^5 - 12x^4 + 8x^3 + 2x - 3)$.

Για $x = 1$ είναι $f''(1) = -e < 0$ και για $x = 2$ είναι $f''(2) = e^{16} > 0$. Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x_1 = 2$ και μέγιστο για $x_2 = 1$.

Εφαρμογή 25

Έστω η συνάρτηση $F(t) = \int_0^t (x^2 + 3x + 2)\,dx,\ t \in \mathbb{R}$.
Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής, το $\lim_{x \to +\infty} F(x)$. Να γίνει πίνακας μεταβολών και πρόχειρη γραφική παράσταση.

ΛΥΣΗ

Είναι $F'(t) = t^2 + 3t + 2$.

- Ρίζες και πρόσημο της F'.

$F'(t) = 0$ ή $t^2 + 3t + 2 = 0$. Άρα η F' έχει ρίζες $t_1 = -2$, $t_2 = -1$ και συνεπώς στο διάστημα $(-2,-1)$ είναι $F'(t) < 0$ ενώ για $t \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$ είναι $F'(t) > 0$.

- Ρίζες και πρόσημο της F''.

Είναι $F''(t) = 2t + 3$ άρα η F'' έχει ρίζα $t_0 = -\frac{3}{2}$ και για $t > -\frac{3}{2}$ είναι $F''(t) > 0$, ενώ για $t < -\frac{3}{2}$ είναι $F''(t) < 0$.

- Είναι $F(t) = \int_0^t (x^2 + 3x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^t = \frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}t^2 + 3t$.

Επομένως

- $\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{3}t^3 = +\infty$
- $\lim_{t \to -\infty} F(t) = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{3}t^3 = -\infty$

- *Πίνακας μεταβολών*

t	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		$+\infty$
$F'(t)$		+	0	−		−	0	+	
$F''(t)$		−		−	0	+		+	
$F(t)$	$-\infty$	↗	$F(-2)$ max	↘	Σημείο καμπής $\left(-\frac{3}{2}, F(-\frac{3}{2})\right)$	↘	$F(-1)$ min	↗	$+\infty$

- Για $t = -2$ η F έχει τοπικό μέγιστο

$$F(-2) = \int_0^{-2} (x^2 + 3x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{0} = -\frac{2}{3}$$

- Για $t = -1$ η F έχει τοπικό ελάχιστο

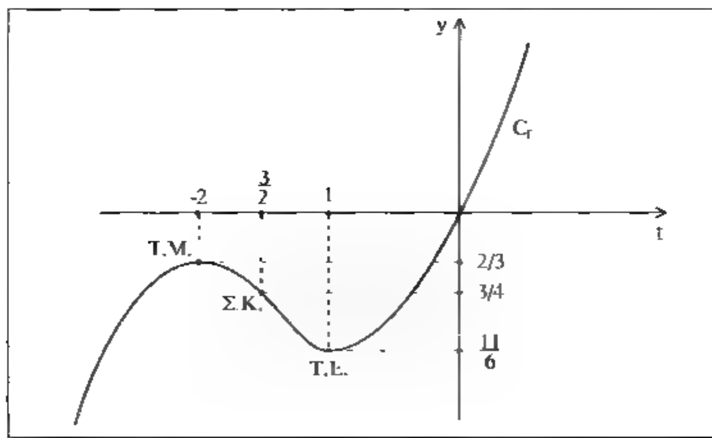
$$F(-1) = \int_0^{-1} (x^2 + 3x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{0} = -\frac{11}{6}$$

- Στο διαστημα $[-2, -1]$ η F είναι γνησίως φθινουσα ενώ σε κάθε ένα από τα διαστηματα $(-\infty, -2]$, $[-1, +\infty)$ είναι γνησιως αύξουσα.

- Στο σημείο $\left(-\frac{3}{2}, F\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$ η C_F έχει καμπή και στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ η C_F στρέφει τα κοίλα κάτω ενω στο διάστημα $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ η C_F στρέφει τα κοίλα άνω

Είναι $F\left(-\frac{3}{2}\right) = \int_0^{-\frac{3}{2}} (x^2 + 3x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-\frac{3}{2}}^{0} = -\frac{3}{4}$

άρα το σημείο καμπής είναι το $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.



Εφαρμογή 26

Έστω η συνάρτηση F με $F(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu\frac{1}{x} - \int_0^x t f(t)\,dt, & x \in [\alpha, b] \setminus \{0\} \\ \gamma, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$

όπου f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, b]$ με $\alpha < 0 < b$.

i) Να οριστεί το γ ώστε η F να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ii) Αποδείξτε κατόπιν ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, b]$ και βρείτε την F΄.

ΛΥΣΗ

i) Για $x \neq 0$ είναι $|F(x)| = \left|x^2 \eta\mu\frac{1}{x} - \int_0^x t\,f(t)\,dt\right| \leq$

$$\leq \left|x^2 \eta\mu\frac{1}{x}\right| + \left|\int_0^x t\,f(t)\,dt\right| \leq |x^2| + \left|\int_0^x t\,f(t)\,dt\right| \quad (1)$$

Εστω M η μέγιστη της $|f|$ στο $[\alpha, b]$. Για $x > 0$ έχουμε:

$$\left|\int_0^x t\,f(t)\,dt\right| \leq \int_0^x |t\,f(t)|\,dt = \int_0^x t\,|f(t)|\,dt \leq \int_0^x t\,M\,dt$$

$$= M\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = M\frac{x^2}{2}.$$

Ομοίως για $x < 0$.

Επομένως η (1) γράφεται $|F(x)| \leq x^2 + \frac{x^2}{2}$ και επειδη $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right) = 0$

θα ειναι $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$ και επειδή $F(0) = \gamma$ πρέπει $\gamma = 0$.

ii) Για $x \neq 0$ είναι $F'(x) = \left(x^2\ \eta\mu\frac{1}{x}\right)' - \left(\int_0^x t\,f(t)\,dt\right)' =$

$$= 2x\,\eta\mu\frac{1}{x} + x^2\ \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)' - x\,f(x) = 2x\,\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} - x\,f(x).$$

Στο $x_0 = 0$, $x \in [\alpha,0) \cup (0,b]$ είναι:

$$\lambda(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{F(x)}{x} = x\eta\mu\frac{1}{x} - \frac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{x}$$

Είναι $\left|x\,\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq |x|$, $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0} x\,\eta\mu\frac{1}{x} = 0$.

Η παρασταση $\dfrac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{x}$ για $x = 0$ παίρνει τη μορφή $\frac{0}{0}$, $\left(\int_0^x t\,f(t)\,dt \text{ συνεχης}\right)$

και επειδη πληρούνται οι προϋποθέσεις του κανονα L' Hospital έχουμε :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} x\,f(x) = 0\cdot f(0) = 0.$$

Αρα $\lim\limits_{x\to 0}\lambda(x) = 0$ συνεπώς $F'(0) = 0$

Γελικά εχουμε : $F'(x) = \begin{cases} 2x\,\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} - x\,f(x), & x \neq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x = 0 \end{cases}$

Εφαρμογή 27

Για $x, y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

$$|\eta\mu x - \eta\mu y| < |x - y|$$

ΛΥΣΗ

● Έστω $x < y$ ισχύει τοτε : $\left|\int_x^y \sigma\upsilon\nu t\, dt\right| < \int_x^y |\sigma\upsilon\nu t|\, dt$

Η συνάρτηση ημt είναι μια αρχική της συνt άρα

$$\left|\int_x^y \sigma\upsilon\nu t\, dt\right| = |[\,\eta\mu t\,]_x^y| \le \int_x^y |\sigma\upsilon\nu t|\, dt \quad \eta \quad |\eta\mu y - \eta\mu x| < \int_x^y |\sigma\upsilon\nu t|\, dt \le \int_x^y 1\, dt$$

ή $|\eta\mu y - \eta\mu x| < y - x = |y - x|$.

Αν $y \le x$ βρίσκουμε όμοια ότι :

$$|\eta\mu x - \eta\mu y| < x - y = |x - y|$$

τελικως έχουμε για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ τη σχεση $|\eta\mu x - \eta\mu y| < |x - y|$

Εφαρμογή 28

Αν $0 < \alpha < \beta$ αποδείξτε ότι $\dfrac{\alpha + \beta}{2} > \dfrac{\beta - \alpha}{\ln\alpha - \ln\beta}$.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $t > 1$ ισχύει $(1 + t)^2 > 4t$ ή $\dfrac{1}{2t} > \dfrac{2}{(1 + t)^2}$.

Άρα θα ειναι $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{dt}{t} > 2\int_1^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{dt}{(1 + t)^2}$ (1)

Η συνάρτηση lnx είναι μια αρχική της $\dfrac{1}{x}$ και η συνάρτηση $\dfrac{1}{1 + x}$ ειναι μια αρχικη της $\dfrac{1}{(1 + x)^2}$ οπότε η (1) γινεται. $\dfrac{1}{2}[\ln x]_1^{\frac{\beta}{\alpha}} > 2\left[\dfrac{-1}{1 + x}\right]_1^{\frac{\beta}{\alpha}}$ η

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\beta}{\alpha} - \ln 1\right) > 2\left(-\frac{1}{1 + \frac{\beta}{\alpha}} + \frac{1}{1 + 1}\right) \text{ ή}$$

$$\frac{1}{2}(\ln\alpha - \ln\beta) > 2\left[-\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{1}{2}\right] \text{ η}$$

$$\frac{1}{2}(\ln\beta - \ln\alpha) > \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta} \text{ ή } \frac{\alpha + \beta}{2} > \frac{\beta - \alpha}{\ln\beta - \ln\alpha}$$

(ειναι $0 < \alpha < \beta$ αρα $\ln\beta > \ln\alpha$ ή $\ln\beta - \ln\alpha > 0$)

Θυμίζουμε ότι όταν $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, b]$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμης του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx > \int_\alpha^\beta g(x)\, dx \quad \alpha < \beta$$

Εφαρμογή 29

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [0, +∞) που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\left| \int_0^x f(t)\, dt \right| < \eta\mu^2 x \quad \text{για κάθε} \quad x \geq 0.$$

Να αποδειχθεί ότι f(0) = 0.

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο [0, +∞) άρα έχει αρχικές συναρτήσεις. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο [0, +∞). Έχουμε:

$$|F'(0)| = \left| \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \right| = \left| \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \right| <$$

$$< \lim_{x \to 0^+} \left| \frac{1}{x}\, \eta\mu^2 x \right| = \lim_{x \to 0^+} \left| \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \cdot x \right| = 0$$

Είναι όμως $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ οπότε $F'(0) = f(0)$ άρα $|f(0)| < 0$ συνεπώς $f(0) = 0$.

Εφαρμογή 30

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $0 \leq f'(x) < 1$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι:

$$\textbf{Για κάθε } x \geq 0 \textbf{ έχουμε } \int_0^x f^3(t)\, dt \leq \left(\int_0^x f(t)\, dt \right)^2.$$

ΛΥΣΗ

Από τη σχέση $0 < f'(t) < 1$ έχουμε $0 \leq \int_0^x f'(t)\, dt < \int_0^x 1\, dt$ ή $0 \leq f(x) < x$ για κάθε $x \geq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f^3(t)\, dt - \left(\int_0^x f(t)\, dt \right)^2$

Η F είναι παραγωγίσιμη για $x \geq 0$ με

$$F'(x) = f^3(x) - 2 \int_0^x f(t)\, dt \left(\int_0^x f(t)\, dt \right)' \qquad \text{ή}$$

$$F'(x) = f^3(x) - 2 \int_0^x f(t)\, dt \cdot f(x) = f(x) \left[f^2(x) - 2 \int_0^x f(t)\, dt \right] \quad (2)$$

Παίρνουμε $g(x) = f^2(x) - 2\int_0^x f(t)\, dt$. Είναι $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) = 2f(x)\left(f'(x) - 1\right) < 0$ άρα g(x) φθίνουσα, οπότε για $x \geq 0$ έχουμε $g(x) < g(0)$ ή $f^2(x) - 2\int_0^x f(x)\, dx < 0$.

Επομένως η (2) γίνεται :

$$F'(x) = f(x)\left[f^2(x) - 2\int_0^x f(t)\,dt\right] \leq 0$$

Αρα η F φθινουσα στο $[0, +\infty)$. Συνεπώς για $x \geq 0$ είναι $F(x) \leq F(0) = 0$ ή

$$\int_0^x f^3(t)\,dt - \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 \leq 0 \quad ή \quad \int_0^x f^3(t)\,dt \leq \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2$$

Εφαρμογή 31

Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ όταν :

$$\mathbf{x + \int_0^x f(t)\,dt = (x+1)\,f(x).}$$

ΛΥΣΗ

Ισχύει $x + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (1 + f(t))\,dt$.

Άρα $\int_0^x (1 + f(t))\,dt = (x+1)\,f(x) \qquad (1)$.

Η συναρτηση $g(x) = \int_0^x (1 + f(t))\,dt$ ειναι παραγωγισιμη στο $[0, +\infty)$ με

$g'(x) = 1 + f(x)$. Επομένως από την (1) εχουμε :

$$1 + f(x) = \left[(x+1)\,f(x)\right]' \quad ή \quad 1 + f(x) = f(x) + (x+1)\,f'(x)$$

$$ή \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad άρα \quad f(x) = \ln(1+x) + c \qquad (2)$$

Από την (1) για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 0$ και απο την (2) για $x = 0$ $f(0) = c$ άρα $c = 0$ και επομενως $f(x) = \ln(1+x)$.

Εφαρμογή 32

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{x}{2}\,(f(x) + k) \qquad (1) \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι της μορφής $f(x) = cx + k$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

Απο το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού υπαρχει $c_x \in [0, x]$ τετοιο ώστε :

$$\int_0^x f(t)\,dt = x \cdot f(c_x)$$

επομένως από την (1) θα έχουμε: $2x\,f(c_x) = x\,(f(x)+k)$ ή $2f(c_x) = f(x) + k$ (2) για καθε $x \neq 0$. Όταν $x \to 0$ τοτε και $c_x \to 0$ και επειδή η f συνεχης στο $\mathbb{R}$ θα εχουμε: $\lim_{c_x \to 0} f(c_x) = f(0)$ και συνεπως από την (2) $f(0) = k$. Το πρωτο μελος της (1) ειναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και επομένως συμπεραίνουμε ότι και η f ειναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Παραγωγίζουμε την (1) και εχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[f(x) + k] + \frac{x}{2}\,f'(x)\,, \quad x \neq 0 \quad (2)$$

Αν θέσουμε $g(x) = f(x) - k$ προκύπτει από την (2) οτι $g(x) = x\,g'(x)$, $x \neq 0$ η

$$\frac{g(x) - x\,g'(x)}{x^2} = 0 \quad ή \quad \left(\frac{g(x)}{x}\right)' = 0 \quad άρα \quad \frac{g(x)}{x} = c_1 \quad ή \quad g(x) = c_1 x$$ επομένως

$f(x) - k = c_1 x$ ή $f(x) = c_1 x + k$, $x \neq 0$. Ομοιως για $x < 0$ βρίσκουμε $f(x) = c_2 x + k$.

Εφαρμογή 33

Να αποδείξετε ότι μια συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο T αν και μόνο αν

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = c \quad (c\,,\ \text{σταθερά}) \ \text{για κάθε} \ x \in \mathbb{R}\,.$$

ΛΥΣΗ

- Εστω ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $T \in \mathbb{R}^*$. Άρα για καθε $x \in \mathbb{R}$ ειναι $f(x + T) = f(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση F με :

$$F(x) = \int_0^{x+T} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\,, \ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η F ειναι παραγωγίσιμη.

Αν ονομάσουμε $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ είναι $g(x + T) = \int_0^{x+T} f(t)\,dt$

οπου g παραγωγίσιμη συνάρτήση στο $\mathbb{R}$.

Συνεπως $F(x) = g(x + T) - g(x)$ αρα

$$F'(x) = g'(x + T)\,(x + T)' - g'(x) \quad ή \quad F'(x) = g'(x + T) - g'(x).$$

Ειναι ομως $g'(x) = f(x)$ άρα $F'(x) = f(x + T) - f(x)$ η $F'(x) = 0$ άρα F σταθερη δηλαδή $F(x) = c$.

- Έστω ότι $\int_x^{x+T} f(t)\,dt = c$ τότε $\left(\int_0^{x+T} f(t)\,dt\right)' = 0$ άρα $f(x + T) - f(x) = 0$ η

$f(x+T)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και συνεπώς η f είναι περιοδική με περίοδο T.

Παρατήρηση

Από τη σχέση $\int_x^{x+T} f(t)\,dt = c$ για $x = 0$ παίρνουμε $c = \int_0^T f(t)dt$.

Εφαρμογή 34

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή αν και μόνον αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = c \quad \text{όπου } c \text{ σταθερός αριθμός.}$$

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα έχει αρχική στο $\mathbb{R}$. Έστω F η αρχική αυτής τότε $F'(x)=f(x)$.

- Έστω ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = c \quad \text{τότε} \quad F(x)-F(-x)=c \quad \text{ή}$$

$$F'(x)-F'(-x)(-x)'=0 \quad \text{ή} \quad F'(x)+F'(-x)=0 \quad \text{ή}$$

$$f(x)+f(-x)=0 \quad \text{ή} \quad f(-x)=-f(x) \quad \text{άρα f περιττή.}$$

- Έστω f περιττή. Είναι τότε $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^{-x} f(t)\,dt$.

Θέτουμε $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ τότε $\int_0^{-x} f(t)\,dt=g(-x)$.

Έχουμε τώρα $F(x)=g(x)-g(-x)$ (1).

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $g'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα από την (1) έχουμε:

$F'(x)=g'(x)-g'(-x)(-x)'$ ή $F'(x)=g'(x)+g'(-x)$ ή

$F'(x)=f(x)+f(-x)=0$ αφού f περιττή.

Επειδή $F'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η F θα είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ δηλαδή

$$F(x)=c \quad \text{ή} \quad \int_{-x}^{x} f(t)\,dt=c.$$

Παρατήρηση

Η σχέση $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = c$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα θα ισχύει και για

$x = 0$ έχουμε τότε $c = 0$. Συνεπώς έχουμε την πολύ χρήσιμη πρόταση

" Αν f περιττή στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$ τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt = 0$ "

- Για παράδειγμα $\int_{-1}^{1} x^{2\nu+1}\,συνx\,dx = 0$ γιατί η συνάρτηση

$f(x) = x^{2\nu+1}συνx$ είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[-1, 1]$.

Εφαρμογή 35

Αποδείξτε ότι οι τιμές των παραστάσεων

i) $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt,\ x > 0$ **ii)** $\int_{συνx}^{ημx} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

είναι ανεξάρτητες του x.

ΛΥΣΗ

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ και θέτουμε

$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ τότε $F(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Η g ειναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ άρα και η $g\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι

παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει : $\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ συνεπώς

$$F'(x) = g'(x) - \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$ άρα $F(x) = c$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$F(x) = \int_{συνx}^{ημx} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int_{συνx}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_0^{ημx} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= -\int_0^{-\sigma\upsilon\nu x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_0^{\eta\mu x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Αν θέσουμε $g(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ τότε είναι $F(x) = -g(-\sigma\upsilon\nu x) + g(\eta\mu x)$ (1).

Η g είναι παραγωγίσιμη (για $x \neq \pm 1$) με $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Από την (1) λοιπόν έχουμε:

$$F'(x) = -g'(-\sigma\upsilon\nu x)\,(-\sigma\upsilon\nu x)' + g'(\eta\mu x)\,(\eta\mu x)' \quad \text{ή}$$

$$F'(x) = -\eta\mu x\, g'(-\sigma\upsilon\nu x) + \sigma\upsilon\nu x\, g'(\eta\mu x) \quad \text{ή}$$

$$F'(x) = -\eta\mu x \frac{1}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}} + \sigma\upsilon\nu x \frac{1}{\sqrt{1-\eta\mu^2 x}} = \frac{-\eta\mu x}{\eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{|\sigma\upsilon\nu x|} = 0$$

ή $F'(x) = 0$ συνεπώς $F(x) = c$. Είναι $|\sigma\upsilon\nu x| = \sigma\upsilon\nu x$ γιατί $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Παρατήρηση

Η i) για $x = 1$ γίνεται $F(1) = 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$ άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$

είναι $F(x) = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

Εφαρμογή 36

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο IR. Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$\mathbf{F(x) = \int_0^x f(u)\,(x-u)\,du - \int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du}$$

είναι σταθερή στο IR.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση F γράφεται:

$$F(x) = x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x u\,f(u)\,du - \int_0^x \varphi(u)\,du \quad \text{όπου} \quad \varphi(u) = \int_0^u f(t)\,dt$$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο IR ως παραγωγίσιμη στο IR. Επίσης η συνάρτηση $u\,f(u)$ είναι συνεχής στο IR ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Ειναι :

$$F'(x) = \left(x\int_0^x f(u)\,du\right)' - \left(\int_0^x u\,f(u)\,du\right)' - \left(\int_0^x \varphi(u)\,du\right)' =$$

$$\int_0^x f(u)\,du + x\,f(x) - x\,f(x) - \varphi(x) =$$

$$\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x f(t)\,dt = 0 \text{ ή } F'(x) = 0 \text{ αρα } F(x) = c \text{ όπου } c \text{ σταθερά}$$

Εφαρμογή 37

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α, b]. Να αποδείξετε ότι υπαρχει $c\in(\alpha, b)$ τέτοιο ώστε :

$$\int_\alpha^c f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt = (\alpha + b - 2c)\,f(c).$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = (x - \alpha)\int_\alpha^x f(t)\,dt + (b - x)\int_x^b f(t)\,dt$

Εξετάζουμε συνθήκες Rolle για την g στο [α, b]

i) Η g ειναι συνεχής στο [α, b] (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων)

ii) Η g είναι παραγωγίσιμη στο [α, b] με

$$g'(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt + (x - \alpha)\,f(x) - \int_x^b f(t)\,dt + (b - x)\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)' =$$

$$= \int_\alpha^x f(t)\,dt + (x - \alpha)\,f(x) - \int_x^b f(t)\,dt + (b - x)\,(- f(x)) =$$

$$= \int_\alpha^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt + (2x - \alpha - b)\,f(x)\,.$$

iii) Είναι $g(\alpha) = g(b) = 0$ προφανώς. Άρα υπάρχει $c\in(\alpha, b)$ με $g'(c) = 0$ η

$$\int_\alpha^c f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt + (2c - \alpha - b)\,f(c) = 0 \quad \text{ή}$$

$$\int_\alpha^c f(t)\,dt - \int_c^b f(t)\,dt = (\alpha + b - 2c)\,f(c).$$

Εφαρμογή 38

Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, b] τότε υπάρχει c∈(α, b) τέτοιο ώστε :

$$f(c) = 0 \quad ή \quad \int_\alpha^c f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt .$$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt \int_x^b f(t)\,dt$.

Εξετάζουμε συνθήκες Rolle για την g στο [α, b]

i) Η g είναι συνεχής στο [α, b].

ii) Η g είναι παραγωγίσιμη στο [α, b] (άρα και στο (α, b))

$$g'(x) = f(x)\int_x^b f(t)\,dt + \int_\alpha^x f(t)\,dt \left(\int_x^b f(t)\,dt\right)'$$

$$= f(x)\int_x^b f(t)\,dt + \int_\alpha^x f(t)\,dt \left(-\int_b^x f(t)\,dt\right)'$$

$$= f(x)\int_x^b f(t)\,dt + \int_\alpha^x f(t)\,dt\,(-f(x))$$

$$= f(x)\left[\int_x^b f(t)\,dt - \int_\alpha^x f(t)\,dt\right]$$

iii) Ισχυει ακόμη $g(\alpha) = g(b) = 0$.

άρα υπαρχει c∈(α, b) με $g'(c) = 0$ ή

$$f(c)\left[\int_c^b f(t)\,dt - \int_\alpha^c f(t)\,dt\right] = 0 \quad ή$$

$$f(c) = 0 \quad ή \quad \int_\alpha^c f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt .$$

Εφαρμογή 39

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0, +∞) με f(x) > 0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \dfrac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}, \; x > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει η σχέση F(x) < x.

ii) Να αποδείξετε ότι η F είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η παράγωγός της.

iii) Να αποδείξετε ότι η F είναι αύξουσα στο (0, +∞).

ΛΥΣΗ

Για $0 < t < x$ και $x > 0$ θα είναι $0 \le t\,f(t) \le x\,f(t)$ άρα :

$$\int_0^x t\,f(t)\,dt < \int_0^x x\,f(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt$$

$$\text{συνεπώς } f(x) = \frac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt} < x$$

ii) Επειδή $f(t) > 0$ και $x > 0$ είναι $\int_0^x f(t)\,dt > 0$

Όμως οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t)\,dt$ και $\int_0^x t\,f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμες, οποτε η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = \frac{\left(\int_0^x t\,f(t)\,dt\right)' \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t\,f(t)\,dt \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'}{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^2} =$$

$$= \frac{x\,f(x)\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^2} \qquad (2)$$

iii) Έχουμε : $x\,f(x)\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\int_0^x t\,f(t)\,dt =$

$$= f(x)\left[x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t\,f(t)\,dt\right] \ge 0 \text{ λόγω του ερωτήματος (1)}$$

Συνεπως από την (2) $F'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η F είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Εφαρμογή 40

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, b]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi) = \dfrac{\alpha + b - 2\xi}{(\xi - \alpha)(\xi - b)}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συναρτηση $F(x) = e^{\int_\alpha^x f(t)\,dt}(x - \alpha)(x - b)$.

ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΦΟΙΤΗΤΗΣ Μ.Π.Ι.

Επειδη η f είναι συνεχης στο $[\alpha, b]$ η F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, b]$ (αρα συνεχης). Είναι $F(\alpha) = F(b) = 0$ (προφανώς) συνεπώς ισχύουν οι συνθηκες του θεωρηματος Rolle για την F στο $[\alpha, b]$ άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$.

$$\text{Ειναι } F'(x) = \left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)' e^{\int_\alpha^x f(t)\,dt}(x-\alpha)(x-b) + e^{\int_\alpha^x f(t)\,dt}(x-b+x-\alpha) =$$

$$= f(x)\, e^{\int_\alpha^x f(t)\,dt}(x-\alpha)(x-b) + e^{\int_\alpha^x f(t)\,dt}(2x-\alpha-b) =$$

$$e^{\int_\alpha^x f(t)\,dt}\left[f(x)(x-\alpha)(x-b) + 2x-\alpha-b\right]$$

Συνεπως όταν $F'(\xi) = 0$ έχουμε ισοδύναμα

$$f(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-b) + 2\xi - \alpha - b = 0 \quad \text{ή} \quad f(\xi) = \frac{\alpha+b-2\xi}{(\xi-\alpha)(\xi-b)}.$$

Εφαρμογή 41

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, b]$ με $f(\alpha)\, f(b) \neq 0$. Με τη βοήθεια του θεωρηματος Rolle για την συνάρτηση

$$F(x) = (x-\alpha)\int_x^b f(t)\,dt + (x-b)\int_\alpha^x f(t)\,dt, \quad x \in [\alpha, b].$$

αποδείξτε το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.

ΛΥΣΗ

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, b]$ αρα ισχύουν οι δύο πρώτες συνθήκες του Rolle

Ειναι ακόμη $F(\alpha) = F(b) = 0$.

Συνεπώς υπάρχει $\xi \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$.

Είναι $F(x) = -(x-\alpha)\int_b^x f(t)\,dt + (x-b)\int_\alpha^x f(t)\,dt$. Άρα

$$F'(x) = -\int_b^x f(t)\,dt - (x-\alpha)\left(\int_b^x f(t)\,dt\right)' + \int_\alpha^x f(t)\,dt + (x-b)\left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)'$$

$$\text{ή} \quad F'(x) = -\int_b^x f(t)\,dt - (x-\alpha)f(x) + \int_\alpha^x f(t)\,dt + (x-b)f(x)$$

$$\text{ή} \quad F'(x) = (\alpha-b)f(x) + \int_\alpha^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt \quad \text{ή}$$

$$F'(x) = (\alpha-b)f(x) + \int_\alpha^b f(t)\,dt. \text{ Είναι τώρα } F'(\xi) = 0 \quad \text{ή}$$

$$\text{ή} \quad (\alpha - b)\, f(\xi) + \int_{\alpha}^{b} f(t)\, dt = 0 \quad \text{ή} \quad \int_{\alpha}^{b} f(t)\, dt = (b - \alpha)\, f(\xi).$$

Εφαρμογή 42

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο [α, b]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈ (α, b) τέτοιο ώστε $f(\xi) = \dfrac{1}{b - \xi} \displaystyle\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\, dt$ **.**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση F με $F(x) = (x - b) \displaystyle\int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt, \quad x \in [\alpha, b]$.

Η F είναι παραγωγίσιμη στο [α, b] και ισχύει F(α) = F(b) = 0 συνεπώς ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Rolle για την F στο [α, b] άρα υπάρχει ξ∈ (α, b) με $F'(\xi) = 0$.

Είναι $F'(x) = \displaystyle\int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt + (x - b)\, f(x)$

επομένως $\displaystyle\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\, dt + (\xi - b)\, f(\xi) = 0$ ή $f(\xi) = \dfrac{1}{b - \xi} \displaystyle\int_{\alpha}^{\xi} f(t)\, dt$.

Εφαρμογή 43

Έστω f συνεχής συνάρτηση με f(x) > 0 για κάθε x ∈ ℝ και F μια αρχική αυτής. Αν α, h θετικοί α ≠ h . Αποδείξτε ότι:

$$\frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{2\sqrt{\alpha + h}} \le \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha + h}} f(t^2)\, dt \le \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}} .$$

ΛΥΣΗ

Έστω $g(h) = \displaystyle\int_{\sqrt{\alpha}}^{h} f(t^2)\, dt$ τότε $g'(h) = f(h^2)$ (f(x) συνεχής άρα $f(x^2)$ συνεχής)

Αν $\varphi(h) = \displaystyle\int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha + h}} f(t^2)\, dt$ τότε $\varphi(h) = g\left(\sqrt{\alpha + h}\right)$ άρα

$$\varphi'(h) = g'\left(\sqrt{\alpha + h}\right)\left(\sqrt{\alpha + h}\right)' = f(\alpha + h)\, \frac{1}{2\sqrt{\alpha + h}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G(h) = \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha + h}} f(t^2)\, dt - \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{2\sqrt{\alpha}} . \quad \text{Είναι}$$

$$G'(h) = f(\alpha+h)\,\frac{1}{2\sqrt{\alpha+h}} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,f(\alpha+h)\,(\alpha+h)'$$

$$= f(\alpha+h)\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha+h}} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right) < 0$$

άρα G γνησιως φθίνουσα συνεπώς για $h > 0$ είναι $G(h) < G(0) = 0$.

Ομοια για την άλλη ανισότητα.

Εφαρμογή 44

Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, b]$ με $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, b]$.

Να αποδείξετε ότι: $(b-\alpha)\, f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) < \int_\alpha^b f(x)\,dx \leq (b-\alpha)\,\frac{f(\alpha)+f(b)}{2}$

ΛΥΣΗ

Θεωρουμε τη συνάρτηση F με

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt - (x-\alpha)\,f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right),\ x \in [\alpha, b].$$

Είναι $F'(x) = f(x) - f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right) - \frac{x-\alpha}{2}\,f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)$ (1) Έστω $x \in (\alpha, b]$.

Για την f ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού στο διαστημα $\left[\frac{\alpha+x}{2}, x\right]$ άρα υπάρχει $c_x \in \left(\frac{\alpha+x}{2}, x\right)$ τέτοιο ώστε

$$f(x) - f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right) = \frac{x-\alpha}{2}\,f'(c_x).$$

Η (1) γράφεται τώρα $F'(x) = \frac{x-\alpha}{2}\left(f'(c_x) - f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)\right)$ (2)

Για την f' ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικου λογισμού στο $\left[\frac{x+\alpha}{2}, c_x\right]$ άρα υπάρχει $\xi \in \left(\frac{x+\alpha}{2}, c_x\right)$ με $f'(c_x) - f'\left(\frac{\alpha+x}{2}\right) = \left(c_x - \frac{x+\alpha}{2}\right) f''(\xi) > 0$

άρα η (2) γίνεται $F'(x) > 0$ άρα F αύξουσα στο $[\alpha, b]$ και συνεπώς για $b > \alpha$ θα ειναι $F(b) \geq F(\alpha) = 0$ δηλαδή

$$\int_\alpha^b f(t)\,dt - (b-\alpha)\,f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) > 0 \ \text{ή}\ .$$

$$\int_\alpha^b f(t)\,dt \geq (b-\alpha)\,f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right).$$

Εντελώς ανάλογα δουλεύουμε για το άλλο σκέλος της ανισότητας

Παρατήρηση

Οταν $f''(x) \leq 0$ τότε ισχυει η ανισότητα :

$$(b \quad \alpha)\left[\frac{f(\alpha)+f(b)}{2}\right] < \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx < (b-\alpha)\, f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right).$$

2.4
Εφαρμογές του θεμελιώδους θεωρήματος

Στην παράγραφο αυτή θα παραθέσουμε μερικές εφαρμογές του θεμελιώδους θεωρήματος σε προβλήματα των φυσικών, κοινωνικών και άλλων επιστημων

Στις περιπτώσεις αυτες ζητούμε να υπολογίσουμε με κάποια ακρίβεια ενα πεπερασμένο άθροισμα που παριστάνει την τιμή μιας ποσότητας. Αλλά οταν ένας πολυ μεγαλος αριθμός προσθετέων απαιτείται για την ακριβεια που ζηταμε, ειναι απλούστερο να περάσουμε στο όριο και να εργαστούμε με το αντιστοιχο ορισμένο ολοκλήρωμα.

Αυτή η διαδικασία οδηγει στην κατασκευή διαφόρων μοντελων για φυσικα μεγεθη στα οποία το ολοκλήρωμα είναι η " ακριβής " εκφραση του υπολογισμου του φυσικού αυτού μεγέθους.

Τα προβλήματα αυτά γενικά τιθενται ως εξής:

● Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το ρυθμό μεταβολής $\frac{dQ}{dt}$ και την αρχικη τιμη $Q(t_0) = Q_0$ ενός μεγεθους $Q(t)$. Με την προϋπόθεση τώρα ότι ο ρυθμος μεταβολης $\frac{dQ}{dt}$ είναι συνεχής συνάρτηση του t, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεωρημα

έχουμε: $\int_{t_0}^{t} Q'(u)\,du \quad Q(t) \quad Q(t_0)$ και συνεπώς

$$\boxed{Q(t) = Q_0 + \int^{t} Q'(u)\,du} \qquad (1)$$

Για παράδειγμα ας δούμε γενικα το προβλημα της κίνησης ενος κινητου πανω στον άξονα.

Εστω x(t) η συντεταγμενη του δηλαδή η συνάρτηση που εκφραζει τη θεση του κινητου πάνω στον άξονα, τη χρονική στιγμη t, υ(t) η ταχυτητά του και γ(t) η επιτάχυνσή του.

Επειδή x (t) υ(t) λόγω της (1) , έχουμε:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} x'(u)\,du = x_0 + \int_{t_0}^{t} \upsilon(u)\,du \qquad (2)$$

οπου x_o είναι το σημείο στο οποίο ηταν το κινητό κατά τη χρονική στιγμη t_o.

Ανάλογα για την ταχύτητα έχουμε:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + \int_{t_0}^{t} \upsilon'(u)\,du = \upsilon_0 + \int_{t_0}^{t} \gamma'(u)\,du \qquad (3)$$

οπου υ_o η ταχύτητα του κινητού κατά τη χρονική στιγμή t_o .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Η ταχύτητα ενός κινητού δίνεται από την εξίσωση $\upsilon = 3t^2 + 2t$ m/ sec. Γνωριζουμε ότι το χρονο 2 sec το κινητό διάνυσε διάστημα $S = 12$ m. Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης.

ΛΥΣΗ

Είναι $S(t) = S_0 + \int_{t_0}^{t} \upsilon(u)\,du$

Απο τον τύπο αυτόν για $t_o = 0$, $t = 2$ $S(t) = S(2) = 12$ και $\upsilon = 3t^2 + 2t$ εχουμε:

$$12 = S_0 + \int_0^t (3u^2 + 2u)\,du \quad ή \quad 12 = S_0 + \left[u^3 + u^2\right]_0^2 \quad ή \quad S_0 = 0$$

και συνεπώς η εξίσωση της κίνησης είναι

$$S(t) = \int_0^t \upsilon(u)\,du \quad ή \quad S(t) = t^3 + t^2$$

Εφαρμογή 2

Ενα κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση. Η αρχή των χρόνων και η αρχή των διαστηματων συμπίπτουν (δηλαδή για $t = 0$ είναι και $S = 0$). Η ταχύτητα δίνεται απο την εξίσωση $\upsilon = 2ημ^2t \cdot ημ(2t)$. Να υπολογιστεί το διάστημα που αντιστοιχεί στη χρονικη στιγμή t και η εξίσωση της επιτάχυνσης.

ΛΥΣΗ

Είναι $S(t) = S_0 + \int_0^t \upsilon(u)\,du$ με $S_0 = 0$.

Άρα $S(t) = \int_0^t 2ημ^2u \; ημ2u\,du = \left[ημ^4u\right]_0^t = ημ^4t$.

Είναι $\gamma = \dfrac{du}{dt} = (2ημ^2t\;ημ2t)' = 4ημ^2t\,(4συν^2t - 1)$.

Εντελώς ανάλογα δουλεύουμε για το αλλο σκέλος της ανισοτητας.

Παρατήρηση

Οταν $f''(x) < 0$ τότε ισχύει η ανισότητα :

$$(b - \alpha)\left[\frac{f(\alpha) + f(b)}{2}\right] < \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx < (b - \alpha)\, f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right).$$

2.4
Εφαρμογές του θεμελιώδους θεωρήματος

Στην παράγραφο αυτή θα παραθέσουμε μερικές εφαρμογές του θεμελιωδους θεωρήματος σε προβλήματα των φυσικών, κοινωνικων και άλλων επιστημων

Στις περιπτωσεις αυτές ζητούμε να υπολογίσουμε με κάποια ακρίβεια ένα πεπερασμένο άθροισμα που παριστάνει την τιμή μιας ποσότητας. Αλλα όταν ένας πολυ μεγάλος αριθμός προσθετέων απαιτείται για την ακρίβεια που ζητάμε, ειναι απλουστερο να περάσουμε στο όριο και να εργαστούμε με το αντιστοιχο ορισμένο ολοκλήρωμα.

Αυτή η διαδικασία οδηγεί στην κατασκευή διαφόρων μοντελων για φυσικα μεγέθη στα οποία το ολοκλήρωμα είναι η " ακριβης " έκφραση του υπολογισμου του φυσικού αυτού μεγεθους.

Τα προβλήματα αυτά γενικά τίθενται ως εξής:

- Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το ρυθμό μεταβολής $\frac{dQ}{dt}$ και την αρχική τιμή

$Q(t_o) = Q_o$ ενός μεγέθους $Q(t)$. Με την προϋπόθεση τώρα ότι ο ρυθμός μεταβολης $\frac{dQ}{dt}$ είναι συνεχής συναρτηση του t, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεωρημα

έχουμε: $\int_{t_o}^{t} Q'(u)\,du = Q(t) - Q(t_o)$ και συνεπως

$$\boxed{Q(t) = Q_o + \int_{t_o}^{t} Q'(u)\,du} \qquad (1)$$

Για παράδειγμα ας δούμε γενικά το προβλημα της κίνησης ενος κινητου πάνω στον άξονα.

Έστω $x(t)$ η συντεταγμένη του δηλαδή η συνάρτηση που εκφραζει τη θεση του κινητού πάνω στον άξονα, τη χρονική στιγμη t, $\upsilon(t)$ η ταχύτητά του και $\gamma(t)$ η επιτάχυνσή του.

Επειδη $x'(t) = \upsilon(t)$ λόγω της (1) , έχουμε:

Εφαρμογή 3

Η ταχύτητα ενός σώματος δίνεται από τη σχέση υ − 2συνt m/ sec. Σε χρόνο t = π / 4 sec το σώμα διανύει διάστημα S −10 m. Να βρεθεί η εξίσωση της κινησης.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $S\left(\frac{\pi}{4}\right)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sigma\upsilon\nu t\,dt + S_o$ άρα $10\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sigma\upsilon\nu t\,dt + S_o$ ή $10\ \left[2\eta\mu t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + S_o$

συνεπώς $S_o - 10 - \sqrt{2}$ m και συνεπώς $S(t)\ \int_0^t 2\sigma\upsilon\nu t\,dt + S_o\ \ 2\eta\mu t + 10\ \ \sqrt{2}$ m

Εφαρμογή 4

Κινητό ξεκινά από το 0 (αρχή) και στη χρονική στιγμή t η επιταχυνση ειναι γ(t) −10- 6t m/ sec². Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση όταν το κινητό επειστρέφει στο 0.

ΛΥΣΗ

Ειναι $\upsilon(t)\ \ \upsilon_o + \int_0^t \gamma(u)\,du$.

Είναι $\upsilon_o = 0$ άρα $\upsilon(t) = \int_0^t (10\ \ 6u)\,du - \left[10u\ \ 3u^2\right]_o^t - 10t\ \ 3t^2$ m/ sec .

Είναι $S(t)\ \ S_o + \int_0^t \upsilon(u)\,du$ και για $S_o\ \ 0$ έχουμε :

$$S(t) = \int_0^t (10u\ \ 3u^2)\,du - \left[5u^2\ \ u^3\right]_o^t\ \ 5t^2\ \ t^3 \text{ m} .$$

Άρα για S 0 είναι $5t^2\ \ t^3\ \ 0$ ή $t^2(5\ \ t)\ \ 0$ από την οποίαέχουμε t 0 ή t − 5 sec. Συνεπώς το κινητό επιστρέφει στο 0 μετά από χρόνο t 5 sec ειναι τοτε υ 25 m / sec και γ − 20 m/ sec².

Εφαρμογή 5

Η ειδική θερμότητα 1 Kgr νερού μεταβάλλεται συνάρτηση της θερμοκρασίας t° C σύμφωνα με το τύπο f(t) −1 +0, 00004t + 0,0000009 t ². Να προσδιοριστεί η ποσότητα θερμότητας για να θερμανθεί 1 m³ νερού από 10° C και 60°.

ΛΥΣΗ

Για το 1 m³ ο τύπος που δίνει τη μεταβολή της θερμοτητας είναι

$$f(t)\ \ 1000 + 0{,}0t + 0{,}0009t^2$$

δηλαδή εχουμε $\frac{dQ}{dt} \;\; 1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2$ άρα η ποσότητα θερμότητας

που απαιτείται είναι $Q - \int_{10}^{60} (1000 + 0.04t + 0{,}0009t^2)\, dt$ ή $Q - 50134,\, 5$ Kcal

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_{2}^{?} (x^3 \;\; 7x + 15)\, dx$

ii) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} συν3x\, dx$

iii) $\int_{0}^{1} \sqrt{(x+2)}\, dx$

iv) $\int_{0}^{1} \sqrt{x\sqrt{x\,|x|}}\, dx$

v) $\int_{1}^{3} (|x \;\; 1| + |x \;\; 2| + |x \;\; 3|)\, dx$

vi) $\int_{6}^{4} |x^2 \;\; 2x - 3|\, dx$

vii) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} εφ^2x\, dx$

viii) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (συν^2x + συν^4x)\, dx$

2. Να υπολογίσετ τα ολοκληρώμτα

i) $\int_{0}^{1} \left(\frac{d\sqrt{x^3+1}}{dx}\right) dx$

ii) $\int_{0}^{1} \left(\frac{d^2\sqrt{x^2+1}}{dx^2}\right) dx$

iii) $\int_{0}^{2} \left(\frac{d^3(x^2+3x \;\; 1)}{dx^3}\right) dx$

iv) $\int_{1}^{3} \frac{d(x^2)}{dx}\, dx$

3. Να βρεθεί η τιμή του $α \in \mathbb{R}$ για την οποία έχουμε:

i) $\int_{0}^{α} x(1-x)\, dx \;\; 0\, dx$

ii) $\int_{\blacksquare}^{α} |x(1-x)|\, dx \;\; 0$

4. Αν η f είναι 2 φορές παραγωγισιμη στο διάστημα [- 1, 2] να αποδειξετε ότι

$$f'(1) = \int_{0}^{1} \left(x f''(x) + f'(x)\right) dx$$

5. Υπολογίστε τις παραγωγους των συναρτήσεων

i) $F(x) - \int_{\blacksquare}^{x^3} ημ^3t\, dt$

ii) $F(x) - \int_{1}^{x} \left(\int_{2}^{y} \frac{1}{1+t^2}\, dt\right) dy$

iii) $F(x) - \int_{1}^{\int_{1}^{x} ημt\, dt} ημt\, dt$

iv) $F(x) \;\; \int_{x}^{b} \frac{1}{1+t^2+συν^2t}\, dt$

v) $F(x) - \int_{α}^{b} \frac{x\ln x}{1+t^2}\, dt$

vi) $F(x) = ημ\left(\int_{0}^{x} ημ^2t\, dt\right)$

6. Να υπολογιστουν οι παραγωγοι των συναρτησεων

i) $F(x) = \int_x^{x+1} \frac{t}{1+ημ^2 t}\,dt$

ii) $F(x) = \int_0^{x^4} e^{t^2} ημ^2 t\,dt$

iii) $F(x) = \int_{ημx}^{συνx} \sqrt{1+t^2}\,dt$

iv) $F(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} \ln t\,dt$

7. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(1, 2) και B(2, 3) να βρείτε το $\int_1^2 f'(x)\,dx$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_{-1}^{1} |x-1|(x^2+1)\,dx$

ii) $\int_0^{2π} (|συνx| + |ημx|)\,dx$

iii) $\int_1^4 \max\{x^2+2, 3x\}\,dx$

iv) $\int_0^2 f(x)\,dx$ όταν $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}+1, & x \ge 1 \\ 3x^2-1, & x < 1 \end{cases}$

v) $\int_0^1 \max\left\{\frac{1}{4}, x^2\right\} dx$

vi) $\int_0^4 \left(\int_1^x \sqrt{t}\,dt\right) dx$

9. Αποδείξτε ότι $\int_α^b \left(\int_γ^δ (x+y)\,dy\right) dx = \left(\frac{δ^2-γ^2}{2}\right)(b-α) + (δ-γ)\left(\frac{b^2-α^2}{2}\right)$

10. Αν $P(x) = αx^2+bx+γ$ και

$$\int_0^1 x^k p(x)\,dx = α_k,\ k=1,2,3.$$

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^k p(x),\ k>3.$$

11. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $e^{-x}x^2 + 2e^{-x}x + 2e^{-x}$ και μετά να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{α\to+\infty} \int_0^α e^{-x}x^2\,dx.$$

12. Υποθέτουμε ότι η f'' είναι συνεχής και ότι $\int_0^π [f(x)+f''(x)]\,ημx\,dx = 2.$

Όταν είναι $f(π)=1$, υπολογείστε το f(0).

13. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει

$$\int_1^{x^2} f(t)\,dt = x\ln(2x)$$

να βρείτε την τιμή $f\left(\frac{e}{2}\right)$.

14. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο ℝ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{x-u} - e^{-(x-u)}}{2} f(u)\,du$$

ικανοποιεί τη συνθήκη $F''(x) - F(x) = f(x)$

15. Έστω συνάρτηση f(t), συνεχής για $t \ge 0$ και $b \ne α$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(t) = \frac{1}{α-b}\int_0^t \left(e^{α(t-u)} - e^{b(t-u)}\right) f(u)\,du$$

ικανοποιεί τη συνθήκη

$F''(t) + (α+b)F'(t) + αbF(t) = f(t)$

και τις συνθήκες $F(0) = F'(0)$.

16. Έστω συνάρτηση f συνεχής για $t > 0$ και

$$F(t) = \int_0^t (t-u)\,e^{α(t-u)} f(u)\,du,\ 0<t.$$

Αποδείξτε ότι

$$F''(t) \quad 2\alpha F'(t) + \alpha^2 F(t) = f(t)$$

και οτι $F(1) = F''(1) = 0$.

17. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο IR. Να αποδείξτε ότι η συναρτηση

$$F(x) = \int_{\gamma\alpha}^{\gamma x} f(t)\,dt \quad \gamma \int_{\alpha}^{x} f(\gamma t)\,dt,$$

$$\alpha, b, \gamma \in \mathbb{R}$$

είναι σταθερή στο IR. Προσδιορίστε την F Ποιο συμπέρασμα προκυπτει;

18. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο IR. Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$F(x) \quad \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt \quad \int_{\alpha+\gamma}^{x+\gamma} f(t-\gamma)\,dt$$

Ειναι σταθερή, για καθε α, b, γ ∈ IR. Προσδιοριστε την F. Ποιο συμπέρασμα προκυπτει;

19. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο IR. Να αποδείξτε οτι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt \quad \int_{\frac{\alpha\beta}{\alpha}}^{\frac{x\beta}{\alpha}} \alpha f(\alpha t+\beta)\,dt,$$

$$\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$$

Είναι σταθερή στο IR. Προσδιορίστε την F Τί συμπεραίνετε;

20. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο IR. Να αποδειξτε ότι η συνάρτηση

$$F(x) \quad \int_{\alpha}^{x} f(u)(x \quad u)\,du \quad \int_{0}^{x}\left[\left(\int_{0}^{u} f(t)\,du\right)\right]du$$

Ειναι σταθερή στο IR. Προσδιορίστε την F Ποιο συμπέρασμα προκύπτει;

21. Αν P(x) ειναι πολυώνυμο το πολύ $2^{ου}$ βαθμου αποδειξτε ότι η συνάρτηση

$$F(x) \quad P(x) \quad \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} P(t)\,dt$$

ειναι σταθερή στο IR.

22. Αν f συνεχής συνάρτηση στο IR, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{x}^{x} f(t^2)\,dt - 2\int_{0}^{x} f(t^2)\,dt$$

είναι σταθερή στο IR. Να προσδιορισετε την F και να διατυπώσετε το συμπέρασμα που προκύπτει.

23. Έστω f συνεχής συναρτηση στο IR. Να αποδείξετε ότι η συναρτηση F με

$$F(x) = \int_{x}^{x} f(t)\,dt \quad \int_{0}^{x} \big(f(t) + f(\ t)\big)\,dt$$

είναι σταθερη στο IR.

24. Έστω η συνάρτηση F με

$$F(x) = \int_{1}^{x} (\ln t \quad 1)\,dt\,,\ x \geq 1\,.$$

Να βρεθεί το ειδος της μονοτονιας, τα ακρότατα και να εξεταστεί ως προς τα κοίλα.

25. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{\frac{2}{\pi}}^{x} \left(2t\,\eta\mu\frac{1}{t} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\right)dt\ .$$

26. Έστω $I_\nu = \int_{0}^{1} t^\nu\,\eta\mu(\pi t)\,dt$.

Να αποδείξετε ότι

i) $0 < I_\nu < \int_{0}^{1} t^\nu\,dt$

ii) $\lim\limits_{\nu\to+\infty} I_\nu \quad 0$

27. Αποδείξτε ότι

$$2\sqrt{2} \quad 2 < \lim_{x\to 1^-}\int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1 \quad t^2}} \leq 2$$

28. Αν η f συνεχής στο [0,1] υπολογιστε $\lim_{x \to 1} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$.

29. Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{t\, dt}{1 + t^2 ημ^2 t}.$$

30. Έστω η συνάρτηση F με

$$f(x) \quad \int_0^{x^2} \frac{dt}{1 + t^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

31. Έστω η συνάρτηση F με

$$f(x) \quad \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}.$$

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονια.

ii) Αποδειξτε οτι $\lim_{x \to +\infty} f(x) \leq f(1) + 1$.

32. Αποδείξτε ότι

$$1{,}13 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4 - συν^2 t}\, dt < 1{,}20$$

33. Βρείτε όλες τις παραγωγισιμες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη σχέση

$$\int_0^x f(t)\, dt - f^2(x) \quad 4.$$

34. Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (0, 1) με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ για την οποια ισχύει

$$\int_α^x (1 \quad t) f(t)\, dt - 2x, \; α \in (0, 1).$$

35. Να βρεθει συνάρτηση f παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}^*$ όταν για κάθε $x \neq 0$ ισχυει

$$x^2 + \int_α^x f(t)\, dt \quad x f(x), \; α \in \mathbb{R}^* \quad (1)$$

36. Να βρεθούν οι συνεχεις συναρτησεις στο $[0, +\infty)$ τέτοιες ώστε

$$\int_0^x |ημ f(t)|\, dt \quad \int_0^x |συν f(t)|\, dt$$

37. Για $λ \geq 5$ να αποδειξετε οτι

$$\lim_{λ \to +\infty} \int_5^λ \left(\frac{x}{e^x} + \frac{|ημx|}{x^2}\right) dx < \frac{2}{5}$$

χωρίς να υπολογιστεί το ολοκληρωμα

38. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2(ν+1)} < \int_0^1 \frac{x^ν}{1 + x^2} < \frac{1}{ν+1}$$

και κατοπιν να υπολογισετε το όριο της ακολουθίας $α_ν \quad \int_0^1 \frac{x^ν}{1 + x^2}$, $ν \in \mathbb{N}^*$.

39. Θεωρουμε τη συναρτηση

$$F(x) \quad \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Να αποδείξετε οτι

i) $\lim_{x \to +\infty} F(x) \leq F(1) + \frac{1}{e}$

ii) F περιττή στο $\mathbb{R}$

40. i) Αποδείξτε ότι $x \quad x^2 < \ln(1 + x) \leq x$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και κατόπιν

$$\frac{1}{6} < \int_0^1 \ln(1 + x)\, dx < \frac{1}{2}.$$

ii) Υπολογίστε το όριο:

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^x \ln(1 + t)\, dt.$$

41. i) Να αποδειξετε ότι

$$ημx \geq x - \frac{x^3}{6}, x \geq 0.$$

ii) Να συγκρίνετε τα ολοκληρωματα

$$3\int_0^1 ημ(x^2)\, dx \quad και \quad \int_0^1 συν(x^2)\, dx$$

42. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \sigma\upsilon\nu x \le 1$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκληρωματα

$$\lim_{x \to 0} \int_x^{3x} \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}\, dt$$

43. Να αποδείξετε ότι αν $1 < \alpha < b$ έχουμε

i) $\frac{1}{e}(e^b - e^\alpha) < \int_\alpha^b x^x\, dx < (e^b - e^\alpha)e^{b^2 - \alpha - b}$

ii) $0 < \int_\alpha^b \frac{dx}{\ln x} - \ln\frac{b-1}{\alpha-1} < b - \alpha$

44. Έστω συνάρτηση f με

$f(x) = \int_0^1 \sqrt{1 - x^\alpha}\, dx$, $x > 0$. Αποδείξτε

οτι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχυει:

i) $1 - x^\alpha < \sqrt{1 - x^\alpha} < 1 - \frac{1}{2}x^\alpha$

ii) $\frac{\alpha}{1+\alpha} < f(\alpha) \le \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\alpha + 1}$

45. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1, 1]$. Αν η f αυξουσα να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, dx < f(-1) + f'(1)$$

46. Εστω συνάρτηση g συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $g(x) \ge 0$ που ικανοποιεί τη συνθηκη $g(x + y) \le g(x)\, g(y)$ και

$$\int_0^t g(x)\, dx < M < +\infty$$

οπου M ανεξαρτητο του t.

i) Να αποδειξετε ότι

$4g(x) < [g(x - u) + g(u)]^2$ για κάθε $u \in (0, x)$

ii) Να αποδειξετε ότι $\sqrt{g(x)} \le \frac{M}{x}$

47. Έστω f μια συνάρτηση συνεχης στο διάστημα I και g μια συνάρτηση ορισμενη στο διάστημα I και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in I$ τέτοια ωστε $g(x_0) = 0$ και $g'(x_0) \ne 0$

Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt}{g(x)} \quad \mu\epsilon$$

α) Τον κανόνα L' Hospital

β) Χωρις τον κανόνα L' Hospital.

48. Εστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, b]$ με $f(x) > 0$ για καθε $x \in [\alpha, b]$. Εαν για την f ισχύει

$\int_\alpha^b f(x)\, dx = 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha = b$.

49. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$0 \le \int_\alpha^x f(t)\, dt \le \int_\alpha^x (x - t) f(t)\, dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

50. Εστω μια συναρτηση f συνεχης στο διαστημα $(0, +\infty)$ με $f(x) > 0$. Εάν η f ικανοποιεί την σχέση $f(x+1) < f(x)$ για καθε $x \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι η ακολουθια α_ν με γενικό όρο

$\alpha_\nu = \int_\nu^{\nu+1} f(x)\, dx$ είναι συγκλίνουσα.

51. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διαστημα $[\alpha, b]$. Ν' αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in (\alpha, b)$ ισχύει:

$|F(x) - F(y)| \le k\,|x - y|$ όπου $k > 0$ (k σταθερός) και η F είναι μια αρχικη συναρτηση της f.

52. Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, b]$. Η f είναι δυο φορες παραγωγίσιμη στο $[\alpha, b]$ και ισχύουν $f(\alpha) = f(b) = 0$ $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, b)$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\varrho_1, \varrho_2 \in (\alpha, b)$ τέτοιοι ώστε $\varrho_1 < \varrho_2$ και

$$f'(\varrho_1) - f'(\varrho_2) \ge \frac{4M}{b-\alpha}$$

όπου $M = \max|f(x)|, \alpha \le x \le b$.

ii) Αν υπάρχει το

$$I = \int_\alpha^b \frac{f''(x)}{f(x)}\,dx\text{, τότε } I \ge \frac{4}{b-\alpha}.$$

53. Έστω f, f_1, f_2 συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, b)$, $b > 0$. Αν $f(x) > 0$, $f_2(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, b)$ και $\frac{f_1}{f_2}$ γνησίως αύξουσα να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F με

$$F(x) = \frac{\int_0^x f(t) f_1(t)\,dt}{\int_0^x f(t) f_2(t)\,dt},\ x \in (0, b) \text{ είναι αύξουσα.}$$

54. Έστω f συνάρτηση στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση F με

$$F(x) = \frac{\int_0^x (\eta\mu t) f(t)\,dt}{\int_\alpha^x (\sigma\upsilon\nu t) f(t)\,dt}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

55. Έστω f συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{\int_0^x t^\nu f(t)\,dt}{\int_\alpha^x t^{\nu-1} f(t)\,dt} \text{ είναι}$$

αύξουσα στο $(0, +\infty)$ για κάθε $\nu \in N^*$

56. Έστω f, g συναρτήσεις στο $[\alpha, b]$ με τις ιδιότητες
i) f συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$
ii) $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, +\infty)$, g παραγωγίσιμη με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, +\infty)$ και $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
iii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο).
Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \frac{1}{g(x)} \int_\alpha^x f(t)\,dt \quad x \in [\alpha, +\infty)$$

έχει όριο στο $+\infty$ και ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g'(x)}.$$

57. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, b]$. Αποδείξτε ότι

$$m \cdot \ln\frac{b}{\alpha} < \int_\alpha^b \frac{f(x)}{x}\,dx < M \cdot \ln\frac{b}{\alpha},$$

όπου m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο διάστημα $[\alpha, b]$.

58. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $-\alpha < f(x) < \alpha$. Να αποδείξετε ότι

$$|f(0)| \ge \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)|\,dx + \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f'(x)|\,dx$$

59. Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, b]$ με $f''(x)$ συνεχή και $F(x) = (f''(x) + f(x))\,\eta\mu(x-\alpha)$
i) Να υπολογίσετε το $\int_\alpha^b F(t)\,dt$.
ii) Όταν $b - \alpha = \pi$ και f θετική στο $[\alpha, b]$ αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, b]$ με

$$f''(\xi) + f(\xi) > 0.$$

60. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, b]$. Εάν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, b]$ με $f''(x) > 0$

ν' αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{b-c}\int_c^b f(x)\,dx \le \frac{1}{b-α}\int_c^b f(x)\,dx +$$

$$+ f(b) + \frac{α+b-2c}{2} f'(c)$$

με c∈ (α, b).

61. Εστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, b) με f''(x) < 0. Να αποδείξετε οτι

$$\frac{(b-α)^2}{2}f'(α) < \int_α^b f(x)\,dx - (b-α)f(α) \le \frac{(b-α)^2}{2}f'(b)$$

62. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο [α, b] με f''(x) ≥ 0 για κάθε x∈[α, b] αποδείξετε ότι

$$\int_α^{\frac{α+b}{2}} f(t)\,dt - \int_{\frac{α+b}{2}}^b f(t)\,dt \le \frac{b-α}{2}\left[f(α) - f\left(\frac{α+b}{2}\right)\right]$$

63. Εστω h, f συναρτήσεις ορισμένες στο [α, b], h συνεχής στο [α, b] και

$$f(x) = \int_α^x h(t)\,dt.$$

Αν m = hmin, M = hmax στο [α, b]. Αποδείξετε ότι

$$m\frac{(b-α)^2}{2} < \int_α^b f(t)\,dt < M\frac{(b-α)^2}{2}$$

64. Εστω f συνεχης και αύξουσα συνάρτηση στο [α, b]. Να αποδείξετε ότι για κάθε x∈(α, b) ισχύει

$$\frac{1}{x-α}\int_α^x f(u)\,du \le \frac{1}{b-α}\int_α^b f(u)\,du$$

$$< \frac{1}{b-x}\int_α^b f(u)\,du$$

65. Εστω μια συνάρτηση f συνεχής και φθινουσα στο διάστημα [α, b]. Να αποδείξετε οτι για x∈(α, b) ισχύει:

$$\frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\,dt < \frac{1}{b-α}\int_α^b f(t)\,dt$$

$$< \frac{1}{x-α}\int_α^x f(t)\,dt.$$

66. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο διάστημα [α, ∞) με τις εξής ιδιοτητες

1) f(x) > 0, g(x) > 0 για κάθε x∈[α, +∞)
2) f συνεχής στο διάστημα [α, ∞)
3) g παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, ∞)
4) g συνεχής στο πεδίο ορισμού της με g'(x) > 0.
5) f(x) ≤ g(x), x∈ [α, ∞).

Να δείξετε οτι

$$f(x) \le g(α)\cdot e^{\int_α^x \frac{g'(t)}{f(t)}dt}, \quad x \in [α, ∞)$$

67. Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο [α, b] με $\int_α^b f(x)\,g(x)\,dx \ne 0$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$F(t) = \int_α^t f(x)\,g(x)\,dx,$$

$$G(t) = \int_t^b f(x)\,g(x)\,dt, \quad x∈[α, b]$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει c∈(α, b) τετοιο ωστε να ισχύει η σχέση

$$\int_α^c f(x)\,g(x)\,dx = k\int_α^c f(x)\,g(x)\,dx, \quad k > 0$$

Αποδειξετε ακόμη ότι αν f, g ομόσημες στο [α, b] τότε το c είναι μοναδικό.

68. Εστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, b] με f(x) > 0 και g(x) > 0 για κάθε x∈[α, b]. Να αποδείξετε ότι για καθε θετικό k υπαρχει μοναδικός αριθμός c∈(α, b) τέτοιος ώστε.

$$\int_α^c f(x)\,dx \int_α^c g(x)\,dx =$$

$$= k\int_c^b f(x)\,dx \int_c^b g(x)\,dx$$

69. Να βρεθούν οι συνεχεις συναρτήσεις f στο διαστημα $[0, +\infty)$ που πληρούν τη σχεση

$$\text{συν}\left|\int_\alpha^x f(t)\,dt\right| = \frac{x}{1+x} \text{ για κάθε } x > 0.$$

70. Αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, b]$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ τετοιο ώστε

$$f(c)\left[\int_\alpha^c f(t)\,dt \quad \int_c^b f(t)\,dt\right] = \int_\alpha^c f(t)\,dt \cdot \int_c^b f(t)\,dt$$

71. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, b]$ με $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει $\int_\alpha^b f(x)\,dx = 0.$

Να αποδειξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ τέτοιο ωστε

$$\int_\alpha^c f(x)\,dx = f(c).$$

72. Εστω f, g δυο συναρτήσεις συνεχείς στο διαστημα $[\alpha, b]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(c) \cdot g(c) \cdot \int_c^b f(t)\,dt \cdot \int_c^b g(t)\,dt = \int_\alpha^c f(t)\,g(t)\,dt \left[f(c) \int_c^b g(t)\,dt + g(c)\int_c^b f(t)\,dt\right]$$

73. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διαστημα $[\alpha, b]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ τέτοιο ώστε

$$\ln f(c)\int_c^b e^{f(t)}\,dt \quad e^{f(c)}\int_\alpha^c \ln f(t)\,dt$$

74. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διαστημα $[0, 1]$ και $P(x)$ ένα πολυώνυμο με $P(0) = 0$.

Εάν ισχύει $\int_0^1 f(x)\,dx = P(1)$

να αποδείξετε οτι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) \quad P'(x_0)$.

75. Έστω h μια παραγωγίσιμη συναρτηση στο $[0, \alpha]$ και

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (h(x) - h(t))\,dt,$$

$$g(x) \quad \int_x^\alpha \frac{f(t)}{t}\,dt, \; x \in (0, \alpha].$$

Να αποδειξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha h(t)\,dt = f(x) - h(x) \quad g(x)$$

για κάθε $x \in (0, \alpha]$.

76. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, b]$ με $f\left(\frac{\alpha + b}{2}\right) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ με $\int_\alpha^c f(t)\,dt \quad \frac{f(c)(c-\alpha)(c-b)}{\alpha + b - 2c}$.

77. Έστω f, g δυο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, b]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $c \in (\alpha, b)$ τέτοιο ωστε

$$\int_\alpha^c f(x)\,dx + (c - \alpha)\,g(c) \quad \int_\alpha^b g(x)\,dx + (b \quad c)\,f(c)$$

78. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$ με $f(x) > 0$, Φ μια συνάρτηση ορισμένη στο $[0, +\infty)$ με $\Phi(x) > 0$ και

$$\Phi(x) = \frac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}.$$

i) Να δείξετε ότι για κάθε x > 0. Ισχυει η σχέση $\Phi(x) \le x$

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση Φ είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η παραγωγός της

iii) Να αποδείξτε ότι η Φ είναι αύξουσα.

79. α) Έστω f, g συνεχεις συναρτησεις στο [α, b]. Αν η g διατηρεί σταθερο πρόσημο στο [α, b] αποδείξτε ότι υπάρχει γ∈ [α, b] τέτοιο ωστε

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,g(x) - f(\gamma)\int_{\alpha}^{b} g(x)\,dx$$

β) Αν f συνεχής στο IR αποδείξτε ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int_{\frac{1}{(\nu-\alpha)^2}}^{\frac{1}{\nu^2}} \frac{f(x)\,d(x)}{x^{\frac{3}{2}}} - 2\alpha f(0),\ \alpha>0 .$$

80. Αν α > 0 αποδείξτε ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int_{\frac{1}{\nu+\alpha}}^{\frac{1}{\nu}} \frac{\eta\mu^2 x}{x^4}\,dx - \alpha .$$

81. Να αποδειξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{\lambda^2}^{\lambda} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = 2 .$$

82. Έστω P ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστες. Αν ξ είναι η μοναδική ρίζα του P στο διάστημα [α, b] και $P'(\xi) < 0$, να αποδειξετε ότι για κάθε x∈ [α, b] ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\xi} P(t)\,dt \ge \int_{\alpha}^{x} P(t)\,dt$$

83. Εστω $0 < x_1 < x_2$ και η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, x_2]$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x\in[0, x_2]$.

$$\text{Αν } \frac{x_1^{\nu-1}}{f(x_1)}\int_0^{x_1} f(t)\,dt - \frac{x_2^{\nu-1}}{f(x_2)}\int_0^{x_2} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{x_1^{\nu} - x_2^{\nu}}{\nu},\ \nu\ge 2,\ \nu\in N.$$

να αποδειξετε οτι υπάρχει $\xi\in(x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $(\nu - 1)\,f(\xi) = \xi\cdot f'(\xi)$.

84. Αν οι συναρτήσεις f, g ειναι συνεχεις στο [α, b] με $g(x)\neq 0$ για καθε x∈ [α, b] τότε υπάρχει ξ∈ (α, b) τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\nu\xi^{\nu-1}}{b^{\nu}-\alpha^{\nu}}\int_{\alpha}^{b}\frac{f(t)}{g(t)}\,dt .$$

85. Εστω μια συνάρτηση f συνεχης στο IR που πληρεί τη σχέση

$$(1)\quad f(x) - \lambda(1+x^2)\left[1+\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt\right]$$

για κάθε x∈ IR , λ∈ IR.

i) Να δείξετε ότι η f ειναι παραγωγίσιμη για καθε x∈ IR

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει μια μονο συνάρτηση f που πληρει την σχέση (1).

29 MAP. 1995

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμου, ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ ανάγεται στον προσδιορισμό μια αρχικής συνάρτησης της f που κατι τέτοιο δεν είναι πάντοτε ευκολο.

Οι μεθοδοι που ακολουθούν στηρίζονται σε γνωστούς κανονες παραγώγησις και μας δίνουν τη δυνατότητα να υπολογίσουμε ολοκληρώματα ορισμένων συναρτήσεων.

Θα παραθεσουμε εδώ τη μέθοδο της **κατά παράγοντες ολοκλήρωσης** και τη **μέθοδο της ολοκλήρωσης με αντικατάσταση.**

7.8 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στον κανόνα της παραγώγησις γινομένου συναρτησεων και περιγράφεται με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση

Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν συνεχείς παραγώγους στο [α,b] τότε

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,g'(x)\,dx = \left[f(x)\,g(x)\right]_{\alpha}^{b} - \int_{\alpha}^{b} f'(x)\,g(x)\,dx$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση f g είναι παραγωγίσιμη στο [α,b] και ισχύει.

$$(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\,g(x) \qquad (1)$$

που σημαίνει ότι η f·g είναι μια αρχική της fg΄ + f΄g. Εξάλλου οι συναρτήσεις f΄g και fg΄ ειναι συνεχείς στο [α,b], οπότε σύμφωνα με το θεμελιώδες θεωρημα του ολοκληρωτικού λογισμού ισχύει.

$$\int_{\alpha}^{b}\left(f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)\right)dx = \left.f(x)\,g(x)\right]_{\alpha}^{b}$$

$$\text{ή} \quad \int_{\alpha}^{b} f(x)\,g'(x)\,dx + \int_{\alpha}^{b} f'(x)\,g(x)\,dx = \left.f(x)\,g(x)\right]_{\alpha}^{b}$$

$$\text{ή} \quad \int_{\alpha}^{b} f(x)\,g'(x)\,dx = \left[f(x)\,g(x)\right]_{\alpha}^{b} - \int_{\alpha}^{b} f'(x)\,g(x)\,dx$$

Η αντίστοιχη πρόταση για το αόριστο ολοκλήρωμα έχει τη μορφή:

- **Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν συνεχείς παραγώγους στο [α, b] τοτε**

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Παρατηρήσεις

Οταν εφαρμόσουμε την κατά παράγοντες ολοκλήρωση σε ένα γινομενο συναρτήσεων, θεωρούμε έναν από τους παράγοντες ως παράγωγο g' μιας συνάρτησης g.

- Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες είναι **"επιτυχής"** όταν με την εφαρμογή καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα που είναι απλουστερο απο το αρχικό
- Η μέθοδος αυτή είναι κατάλληλη για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής.

$$\int x^k \ln x \, dx, \int x^k \eta\mu(\lambda x)\, dx, \int x^k \sigma\upsilon\nu(\lambda x)\, dx, \int x^k e^{\alpha x}\, dx,$$

$$\int e^{\alpha x} \sigma\upsilon\nu(bx)\, dx , \int e^{\alpha x} \eta\mu(bx)\, dx$$

ή ακόμη με εταναληψη της μεθόδου όπως θα δουμε τα επόμενα, σε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x)\, e^{\alpha x}\, dx, \int P(x)\, \eta\mu(bx)\, dx, \int P(x)\, \sigma\upsilon\nu(bx)\, dx , \int P(x) \ln x \, dx$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x.

- **Επισημαίνουμε ότι η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόζεται όταν**
  $f(x)\cdot g(x)= c$, (c σταθερά)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\int_0^1 xe^x\, dx$ **ii)** $\int_1^e x \ln x\, dx$ **iii)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x\, dx$

ΛΥΣΗ

i) Για το γινόμενο xe^x θετουμε $g'(x)=e^x$ και $f(x)$ x οπότε:

$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x\,(e^x)'\, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 (x)'\, e^x\, dx = e - \int_0^1 e^x\, dx =$$

$$= e - [e^x]_0^1 - e \quad (e^1 \quad e^0) = 1$$

ii) Θέτουμε $g'(x)=x$, $f(x)=\ln x$ οπότε

$$\int_1^e x\ln x\, dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \quad \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\, (\ln x)'\, dx =$$

$$\frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

iii) Θέτουμε $g'(x)=\text{συν}x$ οπότε $g(x)=\text{ημ}x$ και $f(x)=x$ οπότε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\text{ημ}x)'\, dx = [x\text{ημ}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\, \text{ημ}x\, dx =$$

$$= [x\text{ημ}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ημ}x\, dx = \frac{\pi}{2} - [-\text{συν}x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

i) $\int \ln x\, dx$ **ii)** $\int \frac{1}{x} \ln x\, dx$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $g'(x)=1$ οπότε $g(x)=x$ και $f(x)=\ln x$.
Έχουμε:

$$\int \ln x\, dx = \int (x)' \ln x\, dx = x\ln x - \int x(\ln x)'\, dx \quad \text{ή}$$

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int 1\, dx \quad \text{ή}$$

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - x + c, \qquad x > 0.$$

ii) Θέτουμε $g'(x)=1/x$ οπότε $g(x)=\ln x$ και $f(x)=\ln x$. Έχουμε τώρα

$$\int \frac{1}{x} \ln x\, dx = \int (\ln x)' \ln x\, dx = \ln^2 x - \int \ln x \cdot (\ln x)'\, dx$$

ή $$\int \frac{1}{x} \ln x\, dx = \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \ln x\, dx$$

$$2\int \frac{1}{x}\ln x\,dx = \ln^2 x + 2c \quad \text{επομένως}$$

$$\int \frac{1}{x}\ln x\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + c.$$

Παρατήρηση

Πολλες φορες στην κατά παράγοντες ολοκλήρωση χρησιμοποιουμε το "τέχν· μα" να θετουμε ως g (x) τον παραγοντα 1 που μπορει παντα να γραφει μέσα στο ολοκληρωμα. Ένα άλλο "τέχνασμα" στην ολοκληρωση κατά παράγοντες είναι η επιλογή του f΄(x) να γίνει κατά τετοιο τρόπο έτσι ώστε το εξαγομενο (προς υπολογισμό του ολοκληρωματος I) να προκύψει ως συνάρτηση πάλι του I οποτε λύνουμε την εξισωση ως προς I.

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \text{συν}2x\,dx$ **ii)** $\int_0^{1} x^2 \cdot e^{x}\,dx$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $g'(x)=\text{συν}2x$ οπότε $g(x)=1/2\,\text{ημ}2x$ και $f(x)=x^2$.

Έχουμε:

$$\int_0^{\pi} x^2\,\text{συν}2x\,dx = \int_0^{\pi} x^2\left(\frac{1}{2}\,\text{ημ}2x\right)' dx \quad \left[\frac{x^2\text{ημ}2x}{2}\right]_0^{\pi} \quad \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(x^2)'\,\text{ημ}2x\,dx =$$

$$= -\int_0^{\pi} x\,\text{ημ}2x\,dx. \quad (1)$$

Επαναλαμβάνουμε τώρα την μέθοδο για το ολοκλήρωμα (1).

Θέτουμε πάλι $g'(x)=\text{ημ}2x$ οπότε $g(x)=-1/2\,\text{συν}2x$ και $f(x)=x$ οποτε.

$$-\int_0^{\pi} x\text{ημ}2x\,dx = \int_0^{\pi} x\left(\frac{1}{2}\,\text{συν}2x\right)' dx = \left[\frac{1}{2}\,x\text{συν}2x\right|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(x)'\,\text{συν}2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi \quad \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\text{συν}2x\,dx \quad \frac{1}{2}\pi \quad \frac{1}{2}\left[\frac{\text{ημ}2x}{2}\right]_0^{\pi} \quad \frac{1}{2}\pi$$

Άρα έχουμε τελικά: $\int_0^{\pi} x^2\,\text{συν}2x\,dx = \frac{1}{2}\pi$

ii) Θετουμε $g'(x)=e^{x}$ οπότε $g(x)= - e^{x}$ και $f(x)=x^2$.
Εχουμε:

$$\int_0^1 x^2 e^{x} dx \quad \int_0^1 x^2 (e^{x})' dx \quad [x^2 e^{x}]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' (- e^{x}) dx$$

$$= \frac{1}{e} + 2 \int_0^1 xe^{x} dx. \quad (1)$$

Επαναλαμβάνουμε τώρα τη μεθοδο για το ολοκλήρωμα. $\int_0^1 xe^{x} dx$.

Θέτουμε πάλι $g'(x)=e^{x}$ οπότε $g(x)=- e^{x}$ και $f(x) \quad x$.

Είναι $\int_0^1 xe^{x} dx = \int_0^1 x (e^{x})' dx \; - \; [xe^{x}]_0^1 + \int_0^1 (x)' e^{x} dx =$

$$[xe^{x}]_0^1 + \int_0^1 e^{x} dx \quad -\frac{1}{e} + [-e^{x}]_0^1 \quad -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 - \quad \frac{2}{e} + 1$$

Από την (1) έχουμε:

$$\int_0^1 x^2 e^{x} dx \quad -\frac{1}{e} + 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) = 2 \quad \frac{5}{e}$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\alpha x} \cdot \sigma\upsilon\nu(bx)\, dx \quad \alpha \neq 0.$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $g'(x)=e^{\alpha x}$ οπότε $g(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ και $f(x) = \sigma\upsilon\nu(bx)$
Επομένως:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\alpha x} \sigma\upsilon\nu(bx)\, dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' \sigma\upsilon\nu(bx)\, dx$$

$$\left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \sigma\upsilon\nu(bx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \cdot (\sigma\upsilon\nu\, bx)'\, dx$$

$$\frac{1}{\alpha}\left[e^{\frac{\alpha\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu \frac{b\pi}{2} - 1\right] + \frac{b}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\alpha x} \cdot \eta\mu(bx)\, dx \qquad (1)$$

Επαναλαμβανουμε τη μέθοδο για το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\alpha x}\cdot ημ(bx)\,dx$.

Θετουμε $g'(x)=e^{\alpha x}$ οπότε $g(x)=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ και $f(x)=ημ\,(bx)$.

Επομένως,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\alpha x}\,ημ(bx)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)' ημ(bx)\,dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\,ημ(bx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\,(ημ\,bx)'\,dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}\,e^{\frac{\alpha\pi}{2}}\,ημ\frac{b\pi}{2} - \frac{b}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\alpha x}\cdot συν\,(bx)\,dx = \frac{1}{\alpha}\,e^{\frac{\alpha\pi}{2}}\,ημ\left(\frac{b\pi}{2}\right) - \frac{b}{\alpha}\,I.$$

Συνεπώς η (1) γράφεται:

$$I = \frac{1}{\alpha}\left[e^{\frac{\alpha\pi}{2}}\,συν\frac{b\pi}{2} - 1\right] + \frac{b}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\,e^{\frac{\alpha\pi}{2}}\,ημ\frac{b\pi}{2} - \frac{b}{\alpha}\,I\right] \quad ή$$

$$I + \frac{b^2}{\alpha^2}\,I = \frac{1}{\alpha}\left[e^{\frac{\alpha\pi}{2}}\,συν\frac{b\pi}{2} - 1\right] + \frac{b}{\alpha^2}\,e^{\frac{\alpha\pi}{2}}\,ημ\frac{b\pi}{2} \quad ή$$

$$(\alpha^2 + b^2)\,I = \alpha\left[e^{\frac{\alpha\pi}{2}}\,συν\frac{b\pi}{2} - 1\right] + b\,e^{\frac{\alpha\pi}{2}}\,ημ\frac{b\pi}{2} \quad ή$$

$$I = \frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2}\left[e^{\frac{\alpha\pi}{2}}\,συν\frac{b\pi}{2} - 1\right] + \frac{b}{\alpha^2 + b^2}\,e^{\frac{\alpha\pi}{2}}\,ημ\frac{b\pi}{2}$$

Εφαρμογή 5

Να βρείτε τη συνάρτηση f του συνόλου I όταν :

α) $I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$ **και** $f(e) = 2$, $x > 1$

β) $I = \int συν(\ln x)\,dx$ **και** $f(e^{\pi}) = 0$, $x > 0$

ΛΥΣΗ

α) Θετουμε $g'(x) = 1/x$ οπότε $g(x)=\ln x$ και $f(x)=\ln(\ln x)$

Εχουμε. $I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \int (\ln x)'\,\ln(\ln x)\,dx = \ln x\cdot\ln(\ln x) - \int \ln x\,\big(\ln(\ln x)\big)'\,dx$ η

$$I = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \int \ln x \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \ln x \ln(\ln x) - \int \frac{1}{x}\, dx \quad ή$$

$$I = \ln x \ln(\ln x) - \ln x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Επομένως $f(x) = \ln x \ln(\ln x) - \ln x + c$ με c τέτοιο ώστε $f(e) = 2$ ή $-\ln e + c = 2$ ή $c = 3$ δηλαδή $f(x) = \ln x \ln(\ln x) - \ln x + 3$.

β) Έχουμε:

$$I = \int συν(\ln x)\, dx = \int (x)' συν(\ln x)\, dx = x\, συν(\ln x) - \int x\, (συν(\ln x))'\, dx \quad ή$$

$$I = x συν(\ln x) + \int x ημ(\ln x) \cdot (\ln x)'\, dx = x συν(\ln x) + \int ημ(\ln x)\, dx \quad (1)$$

Είναι $\int ημ(\ln x)\, dx = \int (x)' ημ(\ln x)\, dx = x ημ(\ln x) - \int x\, (ημ(\ln x))'\, dx$

$= x ημ(\ln x) - \int συν(\ln x)\, dx$ οπότε η (1) γίνεται

$$I = x\, συν(\ln x) + x\, ημ(\ln x) - I + 2c \quad ή$$

$$2I = x\, συν(\ln x) + x\, ημ(\ln x) + 2c \quad ή$$

$$I = \frac{1}{2}\left[x\, συν(\ln x) + x\, ημ(\ln x)\right] + c$$

Επομένως $f(x) = \frac{1}{2}\left[x\, συν(\ln x) + x\, ημ(\ln x)\right] + c$, $c \in \mathbb{R}$ με c τέτοιο ώστε $f(e^{\pi}) = 0$

ή $\frac{1}{2}\left[e^{\pi} συν(\ln e^{\pi}) + e^{\pi} ημ(\ln e^{\pi})\right] + c = 0$ ή $-\frac{1}{2} e^{\pi} + c = 0$ ή $c = \frac{1}{2} e^{\pi}$ οπότε

$f(x) = \frac{1}{2}\left[x\, συν(\ln x) + x\, ημ(\ln x)\right] + \frac{1}{2} e^{\pi}$.

Εφαρμογή 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $g'(x) = 1$ οπότε $g(x) = x$ και $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$. Έχουμε:

$$\int_1^2 \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = \int_1^2 (x)' \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = \left[x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 x \left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)' dx =$$

$$2\ln 2 - \ln 3 - \int_1^2 x \frac{\left(\frac{x+2}{x}\right)'}{\frac{x+2}{x}}\, dx = 2\ln 2 - \ln 3 - \int_1^2 \frac{2dx}{x+2} = \ln\frac{4}{3} + 2\int_1^2 \frac{dx}{x+2} =$$

$$\ln\frac{4}{3} + 2\left[\ln|x+2|\right]_1^2 = \ln\frac{4}{3} + 2(\ln 4 - \ln 3) = \ln\frac{4}{3} + 2\ln\frac{4}{3} = 3\ln\frac{4}{3}.$$

Εφαρμογή 7

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

α) $I_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x \, dx$

β) $I_\nu = \int \sigma\varphi^\nu x \, dx, \quad \nu \in N^*, \quad \nu > 3.$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $I_\nu = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x \, \varepsilon\varphi^2 x \, dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x \, \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \, dx$

$$= \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x \, \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \, dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= \int \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-2}x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \, dx - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x \, dx = \frac{1}{\nu - 1} \int \left(\varepsilon\varphi^{\nu-1}x\right)' dx - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2}x \, dx$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1}x}{\nu - 1} - I_{\nu-2}$$ Επομένως: $I_\nu = \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1}x}{\nu - 1} - I_{\nu-2}$.

β) $I_\nu = \int \sigma\varphi^{\nu-2}x \, \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} \, dx = \int \sigma\varphi^{\nu-2}x \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} - 1 \right) dx =$

$$\int \frac{\sigma\varphi^{\nu-2}x}{\eta\mu^2 x} \, dx - \int \sigma\varphi^{\nu-2}x \, dx = -\frac{1}{\nu - 1} \int \left(\sigma\varphi^{\nu-1}x\right)' dx - \int \sigma\varphi^{\nu-2}x \, dx =$$

$$= -\frac{1}{\nu - 1} \sigma\varphi^{\nu-1}x - \int \sigma\varphi^{\nu-2}x \, dx$$ Επομένως

$$I_\nu = -\frac{1}{\nu - 1} \sigma\varphi^{\nu-1}x - I_{\nu-2}.$$

Εφαρμογή 8

Αν $I_\nu = \int_0^1 x^\nu e^x \, dx$, $\nu \in N^*$ να βρεθεί σχέση που να συνδέει το $I_{\nu+1}$ και το I_ν. Να υπολογιστεί κατόπιν το I_4.

ΛΥΣΗ

Ειναι $\quad I_v = \int_0^1 x^v e^x\, dx$

άρα $\quad I_{v+1} = \int_0^1 x^{v+1} e^x\, dx$

Θέτουμε $g'(x) = e^x$ οποτε $g(x) = e^x$ και $f(x) = x^{v+1}$

Έχουμε:

$$I_{v+1} = \int_0^1 x^{v+1} (e^x)' dx = \left[x^{v+1} \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x (x^{v+1})' dx = e - (v+1)\int_0^1 e^x x^v dx \text{ η}$$

$$I_{v+1} = e - (v+1)\int_0^1 x^v \cdot e^x dx. \text{ Επομένως}$$

$I_{v+1} = e - (v+1)\, I_v,\ v \in \boldsymbol{N^*}.$ (1) Έχουμε $I_1 = 1.$

Από την (1) για $v = 1, 2, 3$ έχουμε:

$I_2 = e - 2I_1 = e - 2$

$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-2) = 6 - 2e$

$I_4 = e - 4I_3 = e - 4(6-2e) = 9e - 24.$

Εφαρμογή 9

Έστω η ακολουθία $\int_1^e (\ln x)^v\, dx$ όπου $v \in N^*$,

i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία I_v είναι μονότονη και φραγμένη.

ii) Να βρεθεί μια (αναγωγική) σχέση μεταξύ των I_{v+1} και I_v και κατόπιν να υπολογιστεί το $\lim\limits_{v \to +\infty} I_v$

ΛΥΣΗ

i) Για $x \in [1,e]$ είναι $0 \le \ln x \le 1$. Έχουμε:

$$I_{v+1} - I_v = \int_1^e (\ln x)^{v+1} dx - \int_1^e (\ln x)^v dx = \int_1^e (\ln x)^v (\ln x - 1)\, dx$$

Είναι ομως $(\ln x)^v (\ln x - 1) \le 0$ οπότε και

$$\int_1^e (\ln x)^v (\ln x - 1) \le 0 \text{ επομένως } I_{v+1} - I_v \le 0 \text{ οπότε}$$

η ακολουθία (I_v) είναι φθίνουσα και συνεπώς έχει άνω φράγμα τον πρωτο της ορο δηλαδή $I_v \le I_1$. Επειδη $(\ln x)^v > 0$ για $x \in [1, e]$ θα είναι και

$$\int_1^e (\ln x)^v dx \ge 0 \quad \text{ή} \quad I_v \ge 0.$$

Επομένως ισχύει $0 \le I_v \le I_1$ για καθε $v \in N^*$ οπότε η I_v είναι μονότονη και φραγμενη (άρα συγκλίνει).

ii) Έχουμε:

$$I_{v+1} = \int_1^e (\ln x)^{v+1} dx = \int_1^e (x)' (\ln x)^{v+1} dx = \left[x (\ln x)^{v+1}\right]_1^e - \int_1^e x \left[(\ln x)^{v+1} \right]' dx \quad \text{η}$$

$$I_{v+1} = e - (v+1) \int_1^e x (\ln x)^v \cdot \frac{1}{x} dx \quad \text{ή}$$

$$I_{v+1} = e - (v+1) \int_1^e (\ln x)^v dx \quad \text{η}$$

$$I_{v+1} = e - (v+1) I_v$$

Η (I_v) είναι μονότονη και φραγμένη άρα συγκλίνουσα.

Εστω $\lim\limits_{v \to +\infty} I_v = L$ τοτε εχουμε $\lim\limits_{v \to +\infty} \frac{1}{v+1} I_{v+1} = \lim\limits_{v \to +\infty} \left(\frac{e}{v+1} - I_v \right)$

απο την οποια παιρνουμε $L = 0$ ή $\lim\limits_{v \to +\infty} I_v = 0$.

Εφαρμογή 10

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_2^b |x - 3| e^{-x} dx$.

ΛΥΣΗ

Η $f(x) = |x - 3| e^{-x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για $b > 3$ έχουμε

$$\int_2^b |x - 3| e^{-x} dx = \int_2^3 -(x-3) e^{-x} dx + \int_3^b |x - 3| e^{-x} dx =$$

$$\int_2^3 (3 - x) e^{-x} dx + \int_3^b (x - 3) e^{-x} dx = I_1 + I_2 \quad \text{οπου}$$

$$I_1 = \int_2^3 (3 - x) e^{-x} dx = \int_2^3 (-e^{-x})' (3 - x) dx = \left[-e^{-x}(3 - x)\right]_2^3 - \int_2^3 (-e^{-x})(3 - x)' dx$$

και $I_2=\int_3^b (x-3)\,e^{-x}\,dx.$

Θέτουμε πάλι $g'(x)=e^{-x}$ οποτε $g(x)=-e^{-x}$ και $f(x)=x-3$.
Έχουμε:

$$I_2=\int_3^b (x-3)\,e^{-x}\,dx=\int_3^b (x-3)\,(-e^{-x})'\,dx=\left[-(x-3)\,e^{-x}\right]_3^b+\int_3^b e^{-x}\,(x-3)'\,dx \quad \text{ή}$$

$$I_2=-(b-3)\,e^{-b}+\int_3^b e^{-x}\,dx=-e^{-b}(b-3)-\left[e^{-x}\right]_3^b=$$

$$=-e^{-b}(b-3)-e^{-b}+e^{-3}=\frac{+1}{e^3}-\frac{1}{e^b}(b-2)$$

Έχουμε λοιπόν: $I=I_1+I_2=\frac{2}{e^3}-\frac{b-2}{e^b}$ επομένως $\lim_{b\to+\infty} I=\frac{2}{e^3}-\lim_{b\to+\infty}\frac{b-2}{e^b}$

Με τον κανόνα L' Hospital εχουμε

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b-2}{e^b}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b}=0 \quad \text{συνεπώς} \quad \lim_{b\to+\infty} I=\frac{2}{e^3}$$

Εφαρμογή 11

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\ln^2x\,(2\ln x-3)}{x^3}\,dx.$

ΛΥΣΗ

Έστω $I(t)=\int_1^t \frac{\ln^3x}{x^3}\,dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό γράφεται:

$$I(t)=\int_1^t \frac{\ln^3x}{x^3}\,dx=\int_1^t \ln^3x\,(x^{-3})\,dx$$

Θέτουμε $g'(x)=x^{-3}$ οπότε $g(x)=-1/2\,x^{-2}$ και $f(x)=\ln^3x$.
Επομένως έχουμε:

$$I(t)=\int_1^t \ln^3x\cdot x^{-3}\,dx=\int_1^t \ln^3x\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)'dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}(\ln^3x)\cdot x^{-2}\right]_1^t+\frac{1}{2}\int_1^t x^{-2}(\ln^3x)'\,dx \quad \text{ή} \quad I(t)=-\frac{1}{2}\frac{\ln^3t}{t^2}+\frac{3}{2}\int_1^t\frac{\ln^2x}{x^3}\,dx \quad \text{η}$$

$$\int_1^t \frac{\ln^3 x}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{\ln^3 t}{t^2} + \frac{3}{2}\int_1^t \frac{\ln^2 x}{x^3}\,dx \quad ή$$

$$-3\int_1^t \frac{\ln^2 x}{x^3}\,dx + 2\int_1^t \frac{\ln^3 x}{x^3}\,dx = -\frac{\ln^3 t}{t^2} \quad ή$$

$$\int_1^t \frac{-3\ln^2 x + 2\ln^3 x}{x^3}\,dx = -\frac{\ln^3 t}{t^2} \quad ή$$

$$\int_1^t \frac{\ln^2 x\cdot(2\ln x - 3)}{x^3}\,dx = -\frac{\ln^3 t}{t^2}$$

Επομένως $\quad \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\ln^2 x\,(2\ln x - 3)\,dx}{x^3} = -\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln^3 t}{t^2}$

και με τον κανόνα L' Hospital έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln^3 t}{t^2} = \frac{3}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln^3 t}{t^2} = \frac{3}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^2} = \frac{3}{4}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2} = 0$$

δηλαδη $\quad \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\ln^2 x\,(2\ln x - 3)}{x^3} = 0$

Παρατήρηση

Έστω p(x) πολυώνυμο του x. Απο τον κανόνα παραγώγισης γινομένου έχουμε: $\quad (p(x)\,e^{\nu x}+c)' = p'(x)\,e^{\nu x}+\nu p(x)\,e^{\nu x} = (\nu p(x)+p'(x))\,e^{\nu x}$
και αν θέσουμε $\nu p(x)+p'(x) = q(x)$ τότε έχουμε :

$(p(x)\,e^{\nu x}+c)' = q(x)\,e^{\nu x}$ όπου q (x) πολυώνυμο του αυτου βαθμου με το πολυώνυμο p (x). Με ολοκλήρωση τώρα έχουμε:

$$\int q(x)\,e^{\nu x}\,dx = p(x)\,e^{\nu x} + c \qquad (1)$$

Η σχέση (1) δινει ένα "τέχνασμα" υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής $\int q(x)\,e^{\nu x}\,dx$ με q(x) πολυώνυμο του x.

Με το τέχνασμα αυτό αποφεύγουμε την διαδοχική εφαρμογη της ολοκληρωσης κατά παράγοντες.

Ανάλογο τέχνασμα προκύπτει αν έχουμε ολοκλήρωμα της μορφης $e^{f(x)}$ όπου f(x) πολυώνυμο του x.

Χαρακτηριστική είναι η εφαρμογή που ακολουθει.

Εφαρμογή 12

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 (x^2+x+1)\,e^{\nu x}dx,\ \ \nu\in N^*$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\int (x^2+x+1)\,e^{\nu x}dx = (\alpha x^2+bx+\gamma)\,e^{\nu x}+c \qquad (1)$

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$(x^2+x+1)\,e^{\nu x}=[\nu\alpha x^2+(\nu b+2\alpha)\,x+\nu\gamma+b]\,e^{\nu x}$ ή

$x^2+x+1=\nu\alpha x^2+(\nu b+2\alpha)\,x+\nu\gamma+b$. Επομένως έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}\nu\alpha=1\\ \nu b+2\alpha=1\\ \nu\gamma+b=1\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{\nu}\\ b=\dfrac{\nu-2}{\nu^2}\\ \gamma=\dfrac{\nu^2-\nu+2}{\nu^3}\end{cases}$$

και συνεπώς

$$\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx=\left[\left(\frac{1}{\nu}x^2+\frac{\nu-2}{\nu^2}x+\frac{\nu^2-\nu+2}{\nu^3}\right)e^{\nu x}\right]_0^1$$

$$=\frac{e^\nu}{\nu}+\frac{\nu-2}{\nu^2}e^\nu+\frac{\nu^2-\nu+2}{\nu^3}(e^\nu-1).$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ (ΑΛΛΑΓΗ) ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Συχνά ένα ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί πιο απλά αν εισάγουμε μια νέα μεταβλητή u στη θέση του x, θέτοντας $x=\varphi(u)$.

Η μέθοδος αυτή λέγεται **μέθοδος της αντικατάστασης** και περιγράφεται με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση

Αν f(x) είναι συνεχής στο [α, β] και με τη βοήθεια της συνάρτησης $x=\varphi(u)$ αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x με τη μεταβλητή u και το διαφορικό dx με το διαφορικό $\varphi'(u)\,du$, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(u)\,dx=\int_\kappa^\lambda f(\varphi(u)\,\varphi'(u)\,du$$

όπου τα όρια κ, λ ορίζονται από τις ισότητες $\alpha=\varphi(\kappa)$ και $\beta=\varphi(\lambda)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο [α, β] και φ(u) μια συνάρτηση 'ένα προς ένα' με συνεχή παράγωγο στο διάστημα Δ και [α, β] ⊆ φ(Δ).

Αν θέσουμε $x = \varphi(u)$, τότε η συνάρτηση $F(\varphi(u))$ είναι αρχική της $f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)$, αφού

$$[F(\varphi(u))]' = F'(\varphi(u))\,\varphi'(u) = f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)$$

Επομένως αν κ, λ είναι τέτοια ώστε, $\alpha = \varphi(\kappa)$ και $\beta = \varphi(\lambda)$ τότε ισχύουν.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u)\,du = F(\beta) - F(\alpha) = F(\varphi(\lambda)) - F(\varphi(\kappa)) = [F(\varphi(u))]_{\kappa}^{\lambda} =$$

$$\int_{\kappa}^{\lambda} [F(\varphi(u))]'\,du = \int_{\kappa}^{\lambda} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $I_1 = \int_2^3 \frac{dx}{1+x}$ β) $I_2 = \int_2^3 \frac{dx}{1-x}$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $x = u - 1 = \varphi(u)$. Για $x = 2$ έχουμε $u = 3$ και για $x = 3$ έχουμε $u = 4$ και στο διάστημα [3, 4] η συνάρτηση φ(u) είναι "ένα προς ένα". Είναι ακόμη $dx = \varphi'(u)\,du = du$. Επομένως:

$$\int_2^3 \frac{dx}{1+x} = \int_3^4 \frac{du}{u} = [\ln u]_3^4 = \ln 4 - \ln 3.$$

ii) Θέτουμε $x = 1 - u = \varphi(u)$. Για $x = 2$ είναι $u = -1$ και για $x = 3$ είναι $u = -2$ και στο διάστημα [- 2,- 1] η συνάρτηση φ(u) είναι "ένα προς ένα". Είναι ακόμη $dx = \varphi'(u)\,du = -du$. Επομένως:

$$\int_1^2 -\frac{du}{u} = \int_2^1 \frac{du}{u} = [\ln|u|]_2^1 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ ii) $I_2 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}}\,dx$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$ ως συνεχής στο $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ είναι ολοκληρώσιμη.

Θέτουμε $x = \dfrac{1}{2}$ ημu $= \varphi(u)$, $u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Για $x = 0$ είναι ημu $= 0$ άρα $u = 0$ και για $x = \dfrac{1}{4}$ είναι ημu $= \dfrac{1}{2}$ άρα $u = \dfrac{\pi}{6}$ και στο διαστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ η συναρτηση είναι "ένα προς ένα". Είναι ακόμη $dx = \varphi'(u)\,du = \dfrac{1}{2}$ συνu du. Επομενως :

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{2}\,\text{ημ}u \cdot \frac{1}{2}\,\text{συν}u\,du}{\sqrt{1-4\,\frac{1}{4}\,\text{ημ}^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{4}\,\text{ημ}u\,\text{συν}u\,du}{\text{συν}u}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{ημ}u\,du = \frac{1}{4}\left[-\text{συν}u\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}\left(-\text{συν}\,\frac{\pi}{6} + \text{συν}\,0\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

ii) Θέτουμε $x = u^{12} - 1 = \varphi(u)$, $u > 0$. Για $x = 0$ έχουμε $u = 1$ και για $x = 1$ έχουμε $u = \sqrt[12]{2}$. Η συνάρτηση $\varphi(u)$ είναι "ένα προς ένα" για $u > 0$ άρα και στο διαστημα $\left[1, \sqrt[12]{2}\right]$. Ειναι ακόμη $dx = \varphi'(u)\,du = 12u^{11}.du$. Επομένως:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}}\,dx = \int_1^{\sqrt[12]{2}} \frac{u^6 - u^4}{u^3}\cdot 12u^{11}du =$$

$$= 12\int_1^{\sqrt[12]{2}} (u^3 - u)\,u^{11}du = 12\int_1^{\sqrt[12]{2}} (u^{14} - u^{12})\,du = 12\left[\frac{u^{15}}{15} - \frac{u^{13}}{13}\right]_1^{\sqrt[12]{2}} =$$

$$= 12\left(\frac{2\sqrt[12]{2^3}}{15} - \frac{2\sqrt[12]{2}}{13}\right) - \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{13}\right).$$

Παρατηρήσεις

Πολλές φορές εμφανίζονται ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

όπου η φ έχει συνεχή παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$ και η f είναι συνεχης στο $\varphi([\alpha, \beta])$.

Η περιπτωση αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της προηγουμενης, οπου μας "υποδεικνύεται" να κάνουμε την αντικατάσταση u φ(x), οποτε φ΄(x) dx, ενώ τα νέα ορια ολοκληρωσης είναι φ(α) και φ(β).
Ετσι αν F είναι μια αρχική της f, ισχυει ο τύπος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,du = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

● Στην πράξη για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αντικαθιστουμε το φ(x) με u και το διαφορικό φ΄(x) dx με το du, οπότε έχουμε f(φ(x)) φ΄(x) dx f(u)du.

Επομενως το πρόβλημά μας ανάγεται στον προσδιορισμό μιας αρχικής συνάρτησης της f(u).
" Τυπικα" για το αόριστο ολοκλήρωμα μπορουμε να γραφουμε.

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + c = F(\varphi(x)) + c.$$

● Η μέθοδος ολοκληρωσης με αντικατάσταση είναι η πιο σημαντικη μεθοδος ολοκληρωσης και επειδή δεν υπάρχουν γενικοί κανονες για την ευρεση των κατάλληλων αντικαταστάσεων απαιτεί πολύ περισσότερη "ευστροφια" από την μέθοδο της ολοκληρωσης κατα παράγοντες

Ισως βοηθήσει να αναφέρουμε εδώ μερικές περιπτωσεις που μπορουμε να υποδειξουμε την αντικατάσταση που κάνουμε συνηθως. Εχουμε λοιπόν:

Ολοκληρώματα της μορφής.

i) $\int f(x^2)\,x dx$ υπολογίζονται με την αντικατάσταση, $u = x^2$.

ii) $\int f(\ln x)\,\frac{dx}{x}$, υπολογίζονται με την αντικατάσταση $u = \ln x$

iii) $\int f(\eta\mu x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx$, $\int f(\sigma\upsilon\nu x)\,\eta\mu x\,dx$, $\int f(\varepsilon\varphi x)\,\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

υπολογιζονται με τις αντικαταστάσεις u ημx, u συνx, u = εφx αντιστοιχα.

iv) $\int \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$ υπολογίζονται με την αντικατάσταση x α εφu με

προϋποθεση ότι $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

v) $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$ δηλαδή όταν ο αριθμητής είναι το διαφορικό του παρονομαστή, υπολογίζονται με την αντικατάσταση u = f(x).

Τέλος κρίνουμε σκόπιμο να θυμίσουμε ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)\,du \quad ..$$

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$ ii) $\int \eta\mu^4 x\, \sigma\upsilon\nu x\,dx$

iii) $\int (e^x - 1)\,e^x dx$ iv) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

ΛΥΣΗ

Θα επιδιώξουμε να φέρουμε τις συναρτήσεις στη μορφή f(φ(x))·φ′(x) για να εφαρμόσουμε τον τύπο.

i) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'\,dx$

Θέτουμε $\ln x = u$ οπότε $(\ln x)'\,dx = du$ και επομένως

$$\int \frac{1}{x\ln x} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c.$$

ii) $\int \eta\mu^4 x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int \eta\mu^4 x\cdot(\eta\mu x)'\,dx.$

$$\int \eta\mu^4 x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int u^4\,du = \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{5}\eta\mu^5 x + c.$$

iii) $\int (e^x - 1)\,e^x dx = \int (e^x - 1)(e^x - 1)'\,dx.$ Θέτουμε $e^x - 1 = u$ οπότε

$(e^x - 1)'\,dx = du$ και επομένως

$$\int (e^x - 1)\,e^x dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(e^x - 1)^2 + c.$$

iv) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx.$ Θέτουμε $x^2 + x + 1 = u$ οπότε

$(x^2 + x + 1)' \, dx = du$ και επομενως

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln\left|x^2+x+1\right| + c = \ln(x^2+x+1) + c$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int e^x \eta\mu e^x \, dx$ ii) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

iii) $\int e^{e^x} e^x \, dx$ iv) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\int e^x \eta\mu e^x dx = \int \eta\mu e^x (e^x)' dx$.

Θέτουμε $e^x = u$ οπότε $(e^x)' dx = du$ και επομένως

$$\int e^x \eta\mu e^x \, dx = \int \eta\mu u \, du = -\sigma\upsilon\nu u + c = -\sigma\upsilon\nu e^x + c.$$

ii) Έχουμε $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot (\ln x)' \, dx$.

Θέτουμε $\ln x = u$ οπότε $(\ln x)' dx = du$ και επομένως

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$$

iii) Έχουμε $\int e^{e^x} e^x dx = \int e^{e^x} (e^x)' dx$. Θέτουμε $e^x = u$ οπότε

$(e^x)' dx = du$ και επομένως

$$\int e^{e^x} e^x \, dx = \int e^u \, du = e^u + c = e^{e^x} + c.$$

iv) Έχουμε $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' dx$. Θέτουμε $\sqrt{x} = u$ οπότε

$(\sqrt{x})' dx = du$ και επομένως

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^u \, du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

Εφαρμογή 5

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x \, dx$ ii) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x} \, dx$

iii) $\int_2^3 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ iv) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sqrt{e^x - 1}\right) e^x dx$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x} dx.$

Θέτουμε $u = \varphi(x) = \sigma\upsilon\nu x$ οπότε $\varphi(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ και $du = (\sigma\upsilon\nu x)'dx$. Επομενως

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x \, dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u} du = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u} du = [\ln u]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$$

ii) Έχουμε $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu^3 x} dx$. Θέτουμε

$u = \varphi(x) = \eta\mu x$ οπότε $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

και $du = (\eta\mu x)'dx$. Επομένως:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x} dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1}{u^3} du = \left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \left[-\frac{1}{2u^2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

iii) Έχουμε $\int_2^3 \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_2^3 \frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} dx$. Θέτουμε $u = \varphi(x) = \ln x$

οπότε $\varphi(2) = \ln 2$, $\varphi(3) = \ln 3$ και $du = (\ln x)'dx$. Επομένως

$$\int_2^3 \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{u^2}\, du = [\ u^{\ 1}\ ]_{\ln 2}^{\ln 3} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{1}{\ln 2}\ -\ \frac{1}{\ln 3}\ .$$

iv) Εχουμε $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \sqrt{e^x\ \ 1}\ e^x dx \quad \int_{\ln 2}^{\ln 3} \sqrt{e^x - 1}\ (e^x - 1)' dx$. Θέτουμε

$u = \varphi(x) \quad e^x - 1$, οπότε $\varphi(\ln 2) = e^{\ln 2}\ \ 1 = 2 - 1\ \ 1$, $\varphi(\ln 3) = e^{\ln 3} - 1 = 3 - 1\ \ 2$ και $du = (e^x - 1)'\, dx$. Επομένως:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \sqrt{e^x\ \ 1}\ e^x dx = \int_1^2 \sqrt{u}\ du - \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - \frac{4}{3}\sqrt{2}\quad \frac{2}{3}$$

Παρατήρηση

Η ολοκλήρωση τριγωνομετρικών συναρτήσεων παρουσιάζει, λογω πολλών τριγωνομετρικων τύπων μια "ιδιαιτερότητα" γιαυτό θα τις μελετήσουμε ξεχωριστά όπου θα δούμε και τους διαφορους τροπους ολοκληρωσης αυτων.

Εφαρμογή 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) - \dfrac{2x + 1}{x^3 - x}$

i) Να προσδιοριστούν οι τιμές των Α, Β, Γ ώστε να ισχύει :

$$\frac{2x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{\Gamma}{x + 1}$$

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα : $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{x^3 - x}\, dx$

ΛΥΣΗ

i) Παρατηρούμε ότι $x^3\ \ x - x(x\ \ 1)(x+1)$. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστων, οποτε έχουμε

$2x+1\quad A(x^2 - 1) + B(x^2 + x) + \Gamma(x^2\ \ x)$ ή

$2x+1 = (A+B+\Gamma)x^2 + (B\ \ \Gamma)x\ \ A.$

Η τελευταία ισότητα μας οδηγεί στις ισότητες

$$\begin{cases} A + B + \Gamma = 0 \\ \quad B - \Gamma - 2 \\ \qquad A = 1 \end{cases} \quad \text{οπότε}\quad A\quad 1,\ B = \frac{3}{2},\ \Gamma = \ \frac{1}{2}$$

ii) Η συνάρτηση f γράφεται: $\dfrac{2x + 1}{x^3\ \ x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x + 1}$, οπότε

$$\int \frac{2x+1}{x^3-x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c.$$

Παρατήρηση

Η παραπάνω εφαρμογή είναι ολοκλήρωμα της μορφής $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ όπου $p(x)$, $q(x)$ πολυώνυμα του x. Παρακάτω θα δωσουμε μεθοδικοτερη ανάπτυξη της μεθόδου υπολογισμου ολοκληρωματων αυτης της μορφής.

Εφαρμογή 7

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi x\,dx}{1+\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x}$

ΛΥΣΗ

Εχουμε: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi x\,dx}{1+\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx =$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'dx}{\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu^2 x}$. Θέτουμε $u = \varphi(x) = \sigma\upsilon\nu x$,

οπότε $\varphi(0) = 1$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $(\sigma\upsilon\nu x)'dx = du$. Επομένως:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi x\,dx}{1+\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x} = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{u+\sqrt{2}\,u^2} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{du}{u\left(1+\sqrt{2}\,u\right)}$$

Επειδή $\frac{1}{u\left(1+\sqrt{2}\,u\right)} = \frac{1}{u} - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\,u}$

(η απόδειξη μπορεί να γίνει όπως στην προηγούμενη εφαρμογη) έχουμε:

$$I = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{u} - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\,u}\right)du = \left[\ln u\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} - \left[\ln\left(1+\sqrt{2}\,u\right)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} =$$

$$= - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\ln(1+\sqrt{2}\ ) - \ln 2\ ) = \frac{3}{2}\ln 2 \quad \ln(1+\sqrt{2}\ ).$$

Εφαρμογή 8

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α,b]. Να αποδείξετε ότι:

$$(b - \alpha)\int_0^1 f(\alpha + (b-\alpha)\,x)\,dx = \int_\alpha^b f(x)dx, \quad \alpha < b.$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $u \quad \alpha+(b-\alpha)x \quad \varphi(x)$, οπότε $\varphi(0) \quad \alpha$, $\varphi(1) \quad b$ και $du - (b \ \alpha)dx$ η $dx \quad \frac{1}{b \ \ \alpha}du$ Επομένως

$$(b \quad \alpha)\int_0^1 f(\alpha+(b - \alpha)\,x)\,dx = (b \quad \alpha)\int_\alpha^b f(u)\cdot \frac{1}{b-\alpha}\,du \quad \int_\alpha^b f(u)\,du = \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

Παρατήρηση

Στις περιπτώσεις όπου η συνάρτηση, της οποίας ζητάμε το ολοκλήρωμα, έχει τη μορφή $f(\kappa x+\lambda)$, κάνουμε την αντικατάσταση $u - \kappa x+\lambda$ οπότε $dx \quad \frac{1}{\kappa}du$. Έτσι έχουμε την ισότητα:

$$\int f(\kappa x + \lambda)\,dx - \frac{1}{\kappa}\int f(u)\,du \quad (1) \qquad \kappa \neq 0$$

Χαρακτηριστικά είναι τα ολοκληρώματα που αναφέρει το σχολικό βιβλίο.

- $\int \frac{dx}{\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{1}{u}du \quad \frac{1}{\alpha}\ln|u| + c \quad \frac{1}{\alpha}\ln|\alpha x+\beta| \quad \alpha \neq 0$
- $\int \eta\mu(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \eta\mu u\,du = \frac{1}{2}(-\sigma\upsilon\nu u) + c \quad - \frac{1}{\alpha}\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta) + c, \ \alpha \neq 0.$

Όταν έχουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int f(\kappa x + \lambda)\,dx$ τότε η ισότητα (1) γράφεται:

$$\int_\alpha^\beta f(\kappa x + \lambda)\,dx \ - \frac{1}{\kappa}\int_{\kappa\alpha+\lambda}^{\kappa\beta+\lambda} f(u)\,du \quad \kappa \neq 0$$

Εφαρμογή 9

Να αποδείξετε ότι : i) $\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx = \int_0^1 x^{\beta}(1-x)^{\alpha}dx,\ \alpha,\ \beta > 0$

ii) $\int_{\alpha}^{t\alpha}\frac{dx}{x} = \int_1^t \frac{dx}{x},\ \alpha \neq 0,\ x > 0$ **iii)** $\int_t^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{t}} \frac{dx}{1+x^2},\ x > 0$

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $x = 1-u$, για $x = 0$ έχουμε $u = 1$, για $x = 1$ έχουμε, $u = 0$ και $dx = -du$. Επομένως:

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx = \int_1^0 (1-u)^{\alpha}u^{\beta}(-1)du = \int_0^1 (1-u)^{\alpha}u^{\beta}du = \int_0^1 (1-x)^{\alpha}x^{\beta}dx$$

ii) Θέτουμε $x = u\alpha$, για $x = \alpha$ είναι $u = 1$, για $x = t\alpha$ είναι $u = t$ και $dx = \alpha du$. Επομένως έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{t\alpha}\frac{dx}{x} = \int_1^t \frac{1}{u\alpha}\alpha du = \int_1^t \frac{1}{u}du = \int_1^t \frac{dx}{x}.$$

iii) Θέτουμε $x = \frac{1}{u}$, για $x = t$ είναι $u = \frac{1}{t}$, για $x = 1$ είναι $u = 1$ και $dx = -\frac{1}{u^2}du$

Επομένως έχουμε:

$$\int_t^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\frac{1}{t}}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -\int_{\frac{1}{t}}^1 \frac{1}{1+u^2}du =$$

$$\int_1^{\frac{1}{t}} \frac{1}{1+u^2}du = \int_1^{\frac{1}{t}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Εφαρμογή 10

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιοδική με περίοδο $T \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx$ $\alpha \in \mathbb{R}$, είναι ανεξάρτητο του α.

ΛΥΣΗ

Το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{\alpha+T} f(x)\,dx \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_T^{\alpha+T} f(x)\,dx$ έχουμε:

Θέτουμε $x = u+T$, οπότε για $x = T$, είναι $u = 0$, $x = \alpha+T$ είναι $u = \alpha$ και $dx = du$. Επομένως:

$$\int_{T}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{\alpha} f(u+T)\,du = \int_{0}^{\alpha} f(u)\,du = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx \quad (\text{ισχύει } f(u+T) = f(u))$$

Έχουμε τώρα από την (1).

$$I = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα I είναι ανεξάρτητο του α.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Την ίδια εφαρμογή την αποδείξαμε με άλλο τρόπο στη σελίδα 93 εφαρμογή 33. Μπορείτε να συγκρίνετε τους δύο τρόπους.

Εφαρμογή 11

Για μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [- α, α] , να αποδειχθεί ότι:

i) Αν η f είναι περιττή, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

ii) Αν η f είναι άρτια, τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{-\alpha}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$

$$= \int_{0}^{-\alpha} f(-x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{0}^{-\alpha} f(-x)\cdot(-x)'\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{\alpha} f(u)\,du + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = 0 \quad (u = -x).$$

ii) Έχουμε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx =$

$$-\int_{0}^{-\alpha} f(-x)\cdot(-x)'\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{0}^{\alpha} f(u)\,du + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx =$$

$$2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx \quad (u = -x).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η εφαρμογή αυτή είναι πολύ χρησιμη στα ολοκληρώματα. Το ερωτημα i) ενα ε χει αποδειχθει με άλλο τροπο στη σελίδα 94 εφαρμογή 34.

Εφαρμογή 12

Έστω συνάρτηση g συνεχής στο [- 1, 1] με g(x) > 0, που ικανοποιεί τη συνθήκη g(x) g(- x) = 1 για κάθε x∈ [- 1, 1]. Να υπολογισθεί το ολοκληρωμα.

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2\nu}}{g(x)+1}\,dx, \qquad \nu \in N^*$$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(x) = x^{2\nu}$ είναι άρτια στο [- 1, 1]. Έχουμε:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{x^{2\nu}}{g(x)+1}\,dx = \int_{1}^{-1}\frac{(-u)^{2\nu}}{g(-u)+1}\,du \quad (\text{θέσουμε } x=-u) \quad \text{ή}$$

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{x^{2\nu}}{g(-x)+1}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{x^{2\nu}}{\frac{1}{g(x)}+1}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{x^{2\nu}g(x)}{g(x)+1}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{x^{2\nu}(g(x)+1-1)}{g(x)+1}\,dx = \int_{-1}^{1}x^{2\nu}\,dx - \int_{-1}^{1}\frac{x^{2\nu}}{g(x)+1}\,dx \quad \text{ή}$$

$$I = \int_{-1}^{1}x^{2\nu}\,dx - I \quad \text{ή} \quad 2I = \int_{-1}^{1}x^{2\nu}\,dx = 2\int_{0}^{1}x^{2\nu}\,dx$$

$$\text{επομένως} \quad I = \int_{0}^{1}x^{2\nu}\,dx = \left[\frac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+1}.$$

Εφαρμογή 13

Έστω f με $f(x) = \dfrac{1}{x\ \ln x\ (\ln(\ln x))}$ και x∈ (e, +∞).

Να αποδείξετε ότι η f έχει αρχικές συναρτήσεις και να προσδιοριστούν αυτες.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της f είναι A = (e,+∞).

Στο A η f ειναι συνεχής οπότε έχει αρχικές συναρτήσεις.

Εστω $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x\ \ln x\ (\ln(\ln x))}$ Θέτουμε $\ln(\ln x) = u$ τότε $\ln x = e^u$ και $x = e^{e^u}$

Ειναι $dx = e^u \cdot e^{e^u}\,du$.

Επομενως :

$$F(x) \quad \int \frac{e^{u} e^{e^{u}}}{e^{e^{u}} e^{u} u}\, du \quad \int \frac{du}{u} \quad \ln|u| + c \quad \ln\left(\left|\ln(\ln x)\right|\right) + c$$

δηλαδη το σύνολο των αρχικών συναρτήσεων της f είναι οι συναρτήσεις

$F(x) = \ln(|\ln(\ln x)|) + c.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το α∈ IR ώστε να ισχύει:

$$\int_0^1 (x+\alpha)\, e^x\, dx = e\,.$$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $\int_{1}^{1} x|\, e^{2x}\, dx$

ii) $\int_{1} e^{x}(x + |x|)\, dx$

3. Να υπολογισετε τα ολοκληρώματα με τη μεθοδο της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης

i) $\int \sqrt{x}\, \ln x\, dx$

ii) $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

iii) $\int (3x^2 \quad 2x + 1) \ln x\, dx$

iv) $\int x\, συν^2 x\, dx$

v) $\int \frac{x}{συν^2 x}\, dx$

vi) $\int συνx\, e^x\, dx$

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρωματα

i) $\int x^3 e^{x^2}\, dx$

ii) $\int e^{2x}\, συν3x\, dx$

iii) $\int x^3\, ημ2x\, dx$

iv) $\int ημ(\ln x)\, dx$

v) $\int x^{ν} \ln x\, dx$

vi) $\int \frac{1}{συν^3 x}\, dx$

5. Να υπολογιστουν τα όρια:

i) $\lim_{\alpha \to 0} \int_0^{\alpha} e^{x} x\, dx$

ii) $\lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{\alpha} e^{x} x^2\, dx$

6. Να υπολογιστει το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{2e} |\ln x - 1|\, dx\,.$$

7. Να βρείτε τη συνάρτηση f του συνόλου Ι όταν

i) $I = \int συνx\, \ln(1 + συνx)\, dx$

και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$

ii) $\int \frac{1 + ημx}{1 + συνx} e^x\, dx$ και $f(0) = 1$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x^3 \, συν(αx)\, dx .$$

9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int ημx \ln\left(εφ\frac{x}{2}\right) dx$$

10. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)\, e^{νx}\, dx \,, \; ν \in N^* .$$

11. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{\ln^4 x(3\ln x - 5)}{x^4} dx = 0$$

12. Αν $I_ν = \int_0^1 t^ν e^{-t}\, dt \,, \; ν \in N^*$.

να αποδείξετε οτι για κάθε $ν > 1$ ισχύει

$$I_ν = -\frac{1}{e} + ν I_{ν-1}$$

και κατόπιν να υπολογίσετε το I_3.

13. Να βρεθεί σχέση που συνδέει τα $I_ν$, $I_{ν-1}$ όταν

$$I_ν = \int_0^1 x^ν e^{αx}\, dx \,, \; α \neq 0$$

$ν \in N^*$ και κατόπιν να υπολογιστεί το I_4.

14. Αν $I_ν = \int \frac{e^x}{x^ν} dx$, να βρεθεί σχέση που συνδέει τα $I_ν$, $I_{ν-1}$, $ν \in N$, $ν > 1$.

15. Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)$ συνεχής και $f(π/2) = f(0) = 1$ αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\frac{π}{2}} ημx\, f'(x)\, dx = 1.$$

16. Αν η συνάρτηση f εχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[α, β]$ και ισχυει $f'(β) = α$, $f'(α) = β$ αποδείξτε οτι

$$\int_α^β x f''(x)\, dx = α f(α) - β f(β)$$

17. Αν f παραγωγίσιμη συναρτηση με $f'(x)$ συνεχης στο $[0, 1]$ με $f(0) = f(1) = 2$ και

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 3.$$

Να υπολογισετε το $\int_0^1 x f'(x)\, dx$.

18. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορες παραγωγίσιμη στο $[α, b]$ με $f''(x)$ συνεχη, αποδείξτε ότι

$$\int_α^b x f''(x)\, dx = b\big(f'(b) - f(b)\big) - \big(α f'(α) - f(α)\big).$$

19. Έστω συνάρτηση f με

$$f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt \,, \; x \in [1, +\infty)$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι θετικη και φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

ii) Να αποδειξετε οτι ισχυει η σχεση

$$f(x+1) = x f(x) - \frac{1}{e}$$

20. Να αποδείξετε ότι αν f συνεχης στο $[α, b]$ τοτε υπάρχει $c \in (α, b)$ τέτοιο ωστε

$$α\int_α^c f(x)\, dx + b\int_c^b f(x)\, dx = \int_α^b x f(x)\, dx$$

21. Να υπολογιστεί το ολοκληρωμα

$$I = \int (1 + x f'(x))\, e^{f(x)}\, dx$$

όπου $f(x)$ παραγωγισιμη συνάρτηση με $f'(x)$ συνεχή.

22. Με τη μέθοδο της αντικαταστασεως να υπολογιστούν τα ολοκληρωματα

i) $\int e^{συνx}\, ημx\, dx$

ii) $\int 3x\, συν(x^2 + 2)\, dx$

iii) $\int 4x^2 \sqrt{x^3\ \ 2}\, dx$

iv) $\int x^2\sqrt{x - 1}\, dx$

v) $\int x\,(x + 3)^8\, dx$

vi) $\int x\, \sqrt[3]{2x\ \ 1}\, dx$

23. Με τη μεθοδο της αντικατάστασης, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $I_1\ \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^7 x\, \sigma\upsilon\nu^5 x\ \, dx$

ii) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}\, dx$

24. Να υπολογιστουν τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{1}{x^3 + x}\, dx$

ii) $\int \frac{1}{x^2 + 5x + 6}\, dx$

iii) $\int \frac{12x^2 - 70x + 98}{x^3\ \ 9x^2 + 26x\ \ 24}\, dx$

25. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$I = \int \frac{\sqrt{x+1}\ \ \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}\, dx.$

26. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$I = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1 + x}}\, dx\,.$

27. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2^{\nu}}} \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu 2x \ldots \sigma\upsilon\nu 2^{\nu\ 1} dx\ \ \nu \in \mathbb{N}^*.$

(Υποδειξη : Θεωρειτε γνωστο ότι

$\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu 2x \ldots \sigma\upsilon\nu 2^{\nu-1} = \frac{\eta\mu 2^{\nu} x}{2^{\nu}}$)

28. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $I_1 = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha}\, dx$

ii) $I_2\ \ \int \frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x - \varepsilon\varphi^2 \alpha}\,,$

$\alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

29. Να αποδείξετε ότι

$\int_{\ b}^{b} f(x)\, dx\ \ \int_{-b}^{b} f(\ \ x)\, dx$, όπου f

συναρτηση συνεχής στο [b, b].

30. Αποδείξτε ότι

$\int_0^{\alpha} f(x)\, g(\alpha\ \ x)\, dx = \int_0^{\alpha} g(x)\, f(\alpha\ \ x)\, dx.$

31. Έστω f συνεχης με

$f(x) + f(\ \ x) = 1$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπολογίστε $\int_{\ \alpha}^{\alpha} f(x)\, dx$.

32. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιει τη συνθήκη $f(\alpha - x) + f(\alpha + x)\ \ \ 2b$ για καθε $x \in \mathbb{R}$, (α, $b \in \mathbb{R}$). Να αποδείξετε ότι:

$\int_0^{2\alpha} f(t)\, dt = 2\alpha b\,.$

33. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $\alpha f(x) + b f(-x) = \gamma$ για καθε $x \in \mathbb{R}$ και α, b, $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Να υπολογισετε το ολοκληρωμα.

$\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\, dx$ όπου $\delta \neq 0$.

34. Αν η f είναι συνεχής και περιοδικη συναρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο $T \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι.

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha+\nu T}^{b+\nu T} f(x)\,dx$$

για κάθε $\alpha, b \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{Z}$.

35. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} συν(x\, f(x^2))\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} συν(x\, f(x^2))\,dx$$

όπου f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

36. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{0}^{\pi} \frac{ημ2kx}{ημx}\,dx = 0 \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

37. Αν f συνεχής συνάρτηση στο [0, 1] να αποδείξετε ότι

$$\int_{0}^{1} x^{4\nu-1} f(x^{2\nu})\,dx = \frac{1}{2\nu}\int_{0}^{1} x\, f(x)\,dx$$

$\nu \in \mathbb{N}^*$

38. Αν f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$\int_{0}^{\alpha} x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha^2} x\, f(x)\,dx,\ \alpha > 0.$$

39. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο [α, b] που ικανοποιεί τη συνθήκη $f(\alpha+b-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, b]$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{b} x\, f(x)\,dx = \frac{\alpha+b}{2}\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx.$$

40. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\frac{1}{e}}^{εφx} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{σφx} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1$$

41. Να αποδείξετε ότι :

$$\int_{\alpha}^{b} \sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \int_{e^{\alpha}}^{e^{b}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx,$$

όπου $0 < \alpha < b$.

42. Να αποδείξετε ότι :

i) $$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2}} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

ii) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{συνx}{\sqrt[3]{3-συν^3x}}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ημx}{\sqrt[3]{3-ημ^3x}}\,dx$$

iii) $$\int_{0}^{1} \frac{x^2-2x+3}{\ln(x^2-3x+4)}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{x^2+2}{\ln(x^2+x+2)}\,dx.$$

43. Να αποδείξετε ότι

i) $$\int_{2\alpha}^{2b} \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_{2\alpha^2}^{2b^2} \sqrt{\frac{2x+1}{2x}}\,dx \text{ όπου } 0 < \alpha < b.$$

ii) $$\int_{2\nu-1}^{2\nu+1} \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_{2\nu^2-2\nu-1}^{2\nu^2+2\nu-1} \sqrt{\frac{2x+4}{2x+3}}\,dx \text{ όπου } \nu > \frac{1}{2}$$

44. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2}\int_{1}^{0} \sqrt{\frac{4x+5}{x+1}}\,dx = \int_{1}^{2} \sqrt{4x^2-16x+17}\,dx = \int_{2}^{3} \sqrt{1+(2x-4)^2}\,dx$$

45. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διαστημα [γ, δ] και [α, b] ⊂ [γ, δ]. Να βρεθεί η παραγωγος της συνάρτησης.

$$g(x) = \int_{\alpha}^{b} f(x+y)\,dy,\ x \in [\gamma-\alpha, \delta-b]$$

46. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\alpha}^{b} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha)+f(b-x)}\,dx$$

οπου f συνεχής συνάρτηση στο [α, b] και θετικη στο [0, b - α].

47. Αν f συνεχής συνάρτηση στο [-α, α] να αποδειξετε ότι

i) $\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,f(x^2)\,dx = 0$

ii) $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x^2)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x^2)\,dx$

48. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

i) $I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\eta\mu(\nu x)\,dx$ όπου

α) f αρτια συνάρτηση και β) f περιττη

ii) Όμοια όταν $I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sigma\upsilon\nu(\nu x)\,dx$

και f περιττή και f αρτια.

49. Αν $L(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\,dt$ και $x > 0$ να αποδειχθεί ότι: i) $L(xy) = L(x) + L(y)$,

ii) $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$

iii) $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$, $x, y > 0$

50. Αν f συνεχής συνάρτηση στο ℝ, να αποδειξετε ότι

i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

ii) $\int_{0}^{\pi} x\,f(\eta\mu x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx$

51. Έστω α > 0, α ≠ 1 και f, g συνεχεις συναρτησεις στο [-b, b]. Αν η f είναι αρτια συνάρτηση και η g περιττή, αποδείξτε ότι

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}\,dx = \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

52. Να προσδιοριστουν τα α, b, γ ∈ ℝ ώστε η συναρτηση

$F(x) = (\alpha x^2 + bx + \gamma)\sqrt{3-2x}$

να είναι μια αρχική συνάρτηση

$f(x) = x\sqrt{3-2x}$.

53. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^{\alpha}x}\,dx = \frac{\pi}{4},\ \alpha \neq 0.$$

54. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{\nu}} x\,f(\eta\mu(\nu x))\,dx = \frac{\pi}{2\nu}\int_{0}^{\frac{\pi}{\nu}} f(\eta\mu(\nu x))\,dx,\ \nu \in N^*$$

55. Έστω f άρτια συναρτηση συνεχης στο [-α, α]. Να δείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)\,dx}{e^{kx}+1} = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx \text{ για κάθε } k \in \mathbb{R}$$

56. Έστω f άρτια συνάρτηση συνεχης στο [-b, b] $\alpha \in \mathbb{R}^*_+ - \{1\}$. Να δείξετε οτι

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{kx}+1}\,dx = \int_{0}^{b} f(x)\,dx \text{ για κάθε } k \in \mathbb{R}.$$

57. Εστω $\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ και f, g δυο συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο [-b, b] με τις ιδιότητες. Αν η f είναι άρτια και η g είναι περιττή να δείξετε ότι:

$$\int_{b}^{b} \frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}\, dx = \int_{0}^{b} f(x)\, dx.$$

58. Εστω $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

α) Να υπολογίσετε $\int_{-\theta}^{\theta} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}\, dx$

β) Με τη βοήθεια του α) να υπολογίσετε

$$\text{το} \int_{0}^{2\theta} \frac{x}{|\sigma\upsilon\nu(x-\theta)|}\, dx$$

59. Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο [0,1] με $f''(x)$ συνεχή στο [0,1]. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\int_{0}^{1} f(x)\, dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{6} f''(c)$$

60. Εστω f παραγωγίσιμη στο [0, 1] με παραγωγο συνεχη στο [0, 1]. Να αποδείξετε οτι υπάρχει $c \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\int_{0}^{1} f(x)\, dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(c).$$

61. Έστω $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ και

$$f_{\nu}(x) = \int_{0}^{x} f_{\nu-1}(t)\, dt$$

για $\nu \in N^*$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ και $\nu \in N^*$ έχουμε $\nu f_{\nu+1}(x) < x f_{\nu}(x)$ (1). (f_{ν} συνεχεις συναρτήσεις).

62. Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0,1] με $\max f'(x) = M$. Αν υπάρχει $\alpha \in (0, 1]$ τετοιο ώστε

$\int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx = 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\left|\int_{0}^{1} f(x)\, dx\right| \leq \frac{1-\alpha}{2} M.$$

πότε ισχυει η ισότητα;

63. Να υπολογιστει το ολοκλήρωμα

$$I = \int \alpha^{f(x)} \ln\alpha^{f(x)} f'(x)\, dx,$$

οπου f παραγωγισιμη με $f'(x)$ συνεχη. $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

64. Εστω συναρτηση f συνεχης και περιττη στο IR. Να αποδειξετε οτι για κάθε πραγματικο $x_0 \neq 0$ υπάρχουν δυο πραγματικοί x_1, x_2 με $|x_1| < |x_0|$, $|x_2| < |x_0|$ και $x_1 < x_2$ τετοιο ωστε $f(x_2) = \frac{x}{x_1 - x_0}$

65. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο [0, α] και γνησίως αύξουσα. Αν $f([0, \alpha]) = [0, b]$, να αποδειξετε ότι

$$I = \int_{0}^{\alpha} f(t)\, dt + \int_{0}^{b} f^{-1}(t)\, dt = \alpha b$$

66. Έστω συνάρτηση f συνεχης και "ενα προς ενα" στο [α, b] με σύνολο τιμων [γ, δ] όπου $\gamma = f(\alpha)$, $\delta = f(\beta)$. Αν η f ειναι παραγωγίσιμη στο [α, b] με $f'(x) > 0$ για καθε $x \in [\alpha, b]$ να αποδείξετε οτι

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\, dx + \int_{\gamma}^{\delta} f^{-1}(y)\, dy = b\delta - \alpha\gamma$$

67. Αν f είναι συνεχής και αύξουσα στο [α, b] να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{b} (x-\alpha) f(x)\, dx > \int_{\alpha}^{b} (b-x) f(x)\, dx.$$

68. Εστω η ακολουθια

$$I_{\nu} = \int_{0}^{1} \ln(1+x^{\nu})\, dx,\ \nu \in N^*$$

i) Να υπολογίσετε τα ολοκληρωματα I_1, I_2, I_3.

ii) Να αποδείξετε ότι η ακολουθια (I_{ν}) είναι μονοτονη και φραγμένη.

69. Με τη βοηθεια της συνάρτησης

$$f(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{\ln(\ln t)}{t}\, dt$$

να αποδείξετε ότι οταν $e < x \leq y$ τοτε ισχύει $y\,(\ln x)^{\ln x} \leq x\,(\ln y)^{\ln y}$

ΤΡΟΠΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ " ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ " ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αν και έχουμε αναπτύξει τις μεθόδους ολοκλήρωσης δινουμε τώρα και μια σειρα απο λυμένες ασκήσεις κανοντας μια προσπάθεια να χωρισουμε τις ασκησεις υπολογισμού των ολοκληρωμάτων σε κατηγορίες.

1η κατηγορία.

Ολοκληρώματα της μορφής 1 – $\int h'(x)\,dx = h(x) + c,\ \ c \in \mathbb{R}$

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int (e^x + x\,e^x)\,dx$ ii) $\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$

iii) $\int x^{\nu-1} e^{x^\nu}\,dx,\ \nu \in N^*,\ \nu \geq 2$ iv) $\int \frac{\ln^{\nu-1}x}{x}\,dx,\ \nu \geq 2,\ \nu \in N^*$

ΛΥΣΗ

i) Είναι $\int (e^x + x\,e^x)\,dx = \int (xe^x)'\,dx = xe^x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$.

ii) Ειναι $\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx = \int \frac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}}\,dx = \int \left(\sqrt{2+x^2}\right)'dx = \sqrt{2+x^2} + c,\ \ c \in \mathbb{R}$.

iii) Ειναι $\int x^{\nu-1} e^{x^\nu}dx = \frac{1}{\nu}\int (x^\nu)'\,e^{x^\nu}\,dx = \frac{1}{\nu}\int \left(e^{x^\nu}\right)'dx = \frac{e^{x^\nu}}{\nu} + c,\ \ c \in \mathbb{R}$

iv) Είναι $\int \frac{\ln^{\nu-1}x}{x}\,dx = \int \ln^{\nu-1}x\,(\ln x)'\,dx = \frac{1}{\nu}\int \left((\ln x)^\nu\right)'dx = \frac{1}{\nu}(\ln x)^\nu + c,\ \ c \in \mathbb{R}$.

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\,\eta\mu(x^2)\,dx$ ii) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x\ \sigma\upsilon\nu x\,dx$ iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$

ΛΥΣΗ

i) Είναι $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\,\eta\mu(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(x^2)\right]' dx = \left[-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} =$

$$-\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) = 1$$

ii) Είναι $\int_1^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^{e} \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]' dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{e} = \frac{1}{2}$

iii) Είναι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x\,(\eta\mu x)'\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu^4 x)'\,dx =$

$$= \frac{1}{4}\left[\eta\mu^4 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\eta\mu^4\frac{\pi}{2} - \eta\mu^4 0\right) = \frac{1}{4}$$

iv) Είναι $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon\varphi x)'\,\varepsilon\varphi x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(\varepsilon\varphi x)^2\right]' dx$

$$= \frac{1}{2}\left[(\varepsilon\varphi x)^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi^2 0\right) = \frac{1}{2}$$

2η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx = \ln|h(x)| + c$, $c \in \mathbb{R}$ όπου h συνεχής συνάρτηση με σταθερό πρόσημο.

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$ **ii)** $\int \frac{15x^2+1}{5x^3+x+4}\,dx$

iii) $\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+51}\,dx$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

i) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx = \ln(x^2+x+1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

ii) $\int \frac{15x^2+1}{5x^3+x+4}\,dx = \int \frac{(5x^3+x+4)'}{5x^3+x+4}\,dx = \ln|5x^3+x+4| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

iii) $\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+51}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(3x^2-2x+51)'}{3x^2-2x+51}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\ln(3x^2-2x+51) + c = \ln\sqrt{3x^2-2x+51} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(ισχύει $3x^2-2x+51>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\,dx$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+2}\,dx$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$ iv) $\int_0^{1} \frac{e^x}{5+e^x}\,dx$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx = -[\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -[\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$$= -\left[\ln\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right) - \ln(\sigma\upsilon\nu 0)\right] = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\ln 2$$

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\eta\mu x+2)'}{\eta\mu x+2}\,dx = [\ln(\eta\mu x+2)]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= \ln\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}+2\right) - \ln(\eta\mu 0+2) = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)'}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$

$$= -[\ln(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -[\ln(1+0) - \ln 2] = \ln 2.$$

iv) $\int_0^1 \frac{e^x}{5+e^x}\,dx = \int_0^1 \frac{(5+e^x)'}{5+e^x}\,dx = \left[\ln(5+e^x)\right]_0^1 =$

$$\ln(5+e) - \ln 6 = \ln\frac{5+e}{6}$$

3η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $\int h(x)\,dx$, όπου $h(x)$ είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων $\frac{P(x)}{g(x)}$.

Βάσει των παραπάνω ο ο υπολογισμός του ολοκληρώματος ανάγεται στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος της μορφής:

1) $\int \frac{1}{(x-\rho)^\nu}\,dx$, όπου $\nu \in N^*$ ή

2) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu}\,dx$, όπου $\beta^2 - 4\gamma < 0$ και $\gamma \neq 0$, $\nu \in N^*$

Για τα ολοκληρώματα της μορφής (1) έχουμε:

$$\int \frac{dx}{(x-\rho)^\nu} = \begin{cases} \ln|x-\rho| + c & , \text{αν } \nu = 1 \\ \frac{1}{(1-\nu)}\frac{1}{(x-\rho)^{\nu-1}} + c, & \text{αν } \nu \geq 2, \quad c \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Για τα ολοκληρώματα της μορφής (2) έχουμε:

$$I = \int \frac{Ax+B}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu}\,dx = \int \frac{(Ax+B)\,dx}{\left[\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + k^2\right]^\nu}, \text{ όπου } k^2 = \frac{4\gamma-\beta^2}{4} > 0.$$

Θέτοντας $x + \frac{\beta}{2} = t$, βρίσκουμε:

$$I = \int \frac{At - \frac{\beta A}{2} + B}{(t^2+k^2)^\nu}\,dt = \frac{A}{2}\int \frac{(t^2+k^2)'}{(t^2+k^2)^\nu} + \frac{2B-\beta A}{2}\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^\nu}$$

Για το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^\nu}$ έχουμε τον αναγωγικό τύπο:

$$I_\nu = \frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{2(\nu-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+k^2)^{\nu-1}} + \frac{2\nu-3}{2(\nu-1)}I_{\nu-1}\right], \text{ για κάθε } \nu > 1$$

● ***Σημείωση.*** Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή κάνουμε πρώτα τη διαίρεση.

Αρα εχουμε:

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{x^3 + x^5} = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x^3}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\left[\ln x\right]_1^3 + \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 + \frac{1}{2}\left[\ln (x^2+1)\right]_1^3$$

$$= -\ln 3 + \left(\frac{3^{-2}}{-2} - \frac{1}{-2}\right) + \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 2)$$

$$= -\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 10 + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 3 + \frac{4}{9}$$

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int \frac{(e^{3x} - e^{x})\,dx}{e^{4x} - e^{3x} + 2e^{2x} - e^{x} + 1}$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $e^x = t$ και εχουμε $e^x\,dx = dt$ η $dx = 1/t\,dt$. Το ολοκληρωμα I γράφεται :

$$I = \int \frac{(t^3 - t)\cdot \frac{1}{t}\,dt}{t^4 - t^3 + 2t^2 - t + 1} = \int \frac{(t^2 - 1)\,dt}{(t^2+1)^2 - t(t^2+1)} = \int \frac{(t^2-1)\,dt}{(t^2+1)(t^2-t+1)}$$

Έχουμε $\frac{t^2 - 1}{(t^2+1)(t^2-t+1)} = -\frac{2t}{t^2+1} + \frac{2t-1}{t^2-t+1}$, οπότε

$$I = -\int \frac{2t\,dt}{t^2+1} + \int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt = -\ln(t^2+1) + \ln(t^2-t+1) + c$$

$$= \ln\frac{t^2-t+1}{t^2+1} + c = \ln\frac{e^{2x} - e^{x} + 1}{e^{2x}+1} + c, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int \frac{3}{x\,(x^2+1)^2}\,dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $x^2 = t$, $t > 0$ οπότε εχουμε $2xdx = dt$. Το ολοκλήρωμα γραφεται διαδοχικά·

$$I = \int \frac{2x\,dx}{x^2(x^2+1)^2} = \int \frac{dt}{t\,(t+1)^2}$$

Έχουμε $\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{t+1-t}{t(t+1)^2} = \frac{t+1}{t(t+1)^2} - \frac{t}{t(t+1)^2} = \frac{1}{t(t+1)} - \frac{1}{(t+1)^2} =$

$$\frac{t+1-t}{t(t+1)} - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}$$ και συνεπώς:

$$I = \int \frac{dt}{t(t+1)^2} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{(t+1)^2}$$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} + c = \ln x^2 - \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + c$$

$$= \ln\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} + c, \quad \text{όπου} \quad c \in \mathbb{R}.$$

4η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $\int x^{\alpha}(\alpha x^{\beta} + b)^{\gamma}\, dx$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.

Ο υπολογισμος, των παραπάνω ολοκληρωμάτων ανάγεται στον υπολογισμο ολοκληρωμάτων ρητων συναρτήσεων όπως στις παρακάτω περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Αν $\gamma \in \mathbb{Z}$, τότε θέτουμε: $\sqrt[m]{x} = t$ και $x = t^m$, όπου m είναι ένα κοινο πολλαπλάσιο των α και β.

2η περίπτωση

Αν $\frac{\alpha+1}{\beta} \in \mathbb{Z}$, τοτε θέτουμε $\sqrt[p]{\alpha x^{\beta} + b} = t$ ή $\alpha x^{\beta} + b = t^p$, όπου p ειναι ο παρονομαστής του γ.

3η περίπτωση

Αν $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma \in \mathbb{Z}$, τότε θέτουμε $\sqrt[p]{\frac{\alpha x^{\beta} + b}{x^{\beta}}} = t$ και $\frac{\alpha x^{\beta} + b}{x^{\beta}} = t^p$,

οπου p είναι ο παρονομαστης του γ.

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I - \int \sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x}+3)^3 dx$

ΛΥΣΗ

Εχουμε $\alpha \;\; \frac{1}{3}$, $\beta \;\; \frac{1}{2}$ και $\gamma \;\; 3 \in \mathbb{Z}$.

Θέτουμε $\sqrt[6]{x} = t$ και $x = t^6$, οπότε $dx - 6t^5dt$.

Συνεπώς

$$I = \int t^2 (t^3+3) \cdot 6t^5 dt \quad 6\int t^7 (t^3+3)^3 dt$$

$$6\int t^7 (t^9 + 9t^6 + 27t^3 + 27)\, dt$$

$$6\int t^{16} dt + 54\int t^{13} dt + 162\int t^{10} dt + 162\int 1\, dt$$

$$6 \cdot \frac{t^{17}}{17} + 54 \cdot \frac{t^{14}}{14} + 162 \;\; \frac{t^{11}}{11} + 162t + c$$

$$= \frac{6}{17} x^{\frac{17}{6}} + \frac{27}{7} x^{\frac{7}{3}} + \frac{162}{11} x^{\frac{11}{6}} + 162\, x^{\frac{1}{6}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I - \int x^{\frac{1}{5}} \left(3 - 2x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} dx$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha \;\; \frac{1}{5}$, $\beta \;\; \frac{3}{5}$, $\gamma \;\; \frac{1}{2}$ και $\frac{\alpha+1}{\beta} \;\; \frac{\frac{1}{5}+1}{\frac{3}{5}} \;\; \frac{\frac{6}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{6}{5}\,\frac{5}{3} \;\; 2 \in \mathbb{Z}$

Θετουμε $3 \;\; 2x^{\frac{3}{5}} \;\; t^2$ και $x^{\frac{2}{5}}dx \;\; \frac{5}{3}\, t\, dt$.

Συνεπώς το ολοκλήρωμα γραφεται:

$$I \;\; \int (t^2)^{\frac{1}{5}} \;\; \frac{3 \;\; t^2}{2} \left(\frac{5}{3}\, t \right) dt = \;\; \frac{5}{6} \int (3 \;\; t^2)' \, dt$$

$$= \frac{5}{2}\, t + \frac{5}{18}\, t^3 + c \quad \frac{5}{2} \sqrt{3 \;\; 2x^{\frac{3}{5}}} + \frac{5}{18} \left(3 \;\; 2x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} + c, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμογή 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int x^{-6}\left(1+2x^3\right)^{\frac{2}{3}} dx$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha = -6,\ \beta = 3,\ \gamma = \frac{2}{3}$ και $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = \frac{-6+1}{3} + \frac{2}{3} = -1 \in \mathbb{Z}$

Θετουμε $\sqrt[3]{\frac{2x^3+1}{x^3}} = t$ και $2 + x^{-3} = t^3$, οπότε

$$I = \int t^2(-t^2)\,dt = -\int t^4\,dt = -\frac{t^5}{5} + c =$$

$$= -\frac{1}{5}x^{-5}(1+2x^3)^{\frac{5}{3}} + c, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}.$$

5η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής:

$$I = \int f\left(x, \sqrt[\nu_1]{\alpha x + b}, \sqrt[\nu_2]{\alpha x + b}, \ldots, \sqrt[\nu_k]{\alpha x + b}\right) dx$$

Σ' αυτή την περίπτωση θέτουμε $\sqrt[\nu]{\alpha x + b} = t$,
οπου ν είναι το ελαχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k$.

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[3]{x+1} + 1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

ΛΥΣΗ

Θετουμε $\sqrt[12]{x+1} = t$ και $x + 1 = t^{12}$ οπότε $dx = 12t^{11}\,dt$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα γράφεται διαδοχικά

$$I = \int \frac{t^3 + t^4 + 1}{t^6} \cdot 12t^{11}\,dt = 12\int t^5(t^3 + t^4 + 1)\,dt$$

$$= 12\int t^8\,dt + 12\int t^9\,dt + 12\int t^5\,dt$$

$$= 12\cdot\frac{t^9}{9} + 12\cdot\frac{t^{10}}{10} + 12\cdot\frac{t^6}{6} + c = \frac{4}{3}\sqrt[12]{(x+1)^9} + \frac{6}{5}\sqrt[12]{(x+1)^{10}} + 2\sqrt[12]{(x+1)^6} + c$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{(x+1)^3} + \frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} + 2\sqrt{x+1} + c, \text{ όπου } c \in \mathbb{R}$$

6η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής:

$$I = \int f\left(x, \sqrt[k]{\lambda x + \mu}\right) dx \text{ όπου } \mu, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0 \text{ και } k \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$$

Το ολοκλήρωμα I υπολογίζεται με την αντικατάσταση $\sqrt[k]{\lambda x + \mu} = t$

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\sqrt[3]{x+1} = t$ οπότε $x+1 = t^3$ και $x = t^3 - 1, dx = 3t^2\, dt$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int \frac{t^3 - 1 + t}{t}\, dt = \int t^2\, dt + \int 1\, dt - \int \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{t^3}{3} + t - \ln|t| + c = \frac{x+1}{3} + \sqrt[3]{x+1} - \ln\sqrt[3]{x+1} + c, \text{ όπου } c \in \mathbb{R}$$

7η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής: $I = \int f\left(x, \sqrt[k]{\frac{\lambda x + \mu}{\lambda' x + \mu'}}\right) dx,$

όπου $k \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ **και** $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}$, $\lambda\lambda' \neq 0$

Το ολοκλήρωμα I υπολογίζεται με την αντικατάσταση $\sqrt[k]{\frac{\lambda x + \mu}{\lambda' x + \mu'}} = t$

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}} - 1}{x}\, dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = t$ οπότε $\frac{x+1}{x} = t^2$ και $1 + \frac{1}{x} = t^2$ ή

$\frac{1}{x} = t^2 - 1$ ή $x = \frac{1}{t^2 - 1}$ και $dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\, dt$

Το ολοκλήρωμα γραφεται:

$$I = \int \frac{(t-1)(t^2-1)(-2t)}{(t^2-1)^2}\, dt = -2\int \frac{t(t-1)}{t^2-1}\, dt$$

$$= -2\int \frac{t(t-1)}{(t-1)(t+1)}\, dt = -2\int \frac{t}{t+1}\, dt = -2\int \frac{t+1-1}{t+1}\, dt$$

$$= -\int 2dt + 2\int \frac{dt}{t+1} = -2t + 2\ln|t+1| + c$$

$$= -2\sqrt{\frac{x+1}{x}} + 2\ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} + 1\right) + c, \quad \text{όπου } c \in \mathbb{R}.$$

8η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $\int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$**,**

όπου $ax^2 + bx + c \geq 0$**, για κάθε** $x \in \mathbb{R}$**.**

Τα παραπάνω ολοκληρώματα αντιμετωπίζονται με μια απο τις εξής αντικαταστασεις του Euler.

i) Αν $a > 0$, θέτουμε $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$

ii) Αν $a < 0$ και $c > 0$, θέτουμε $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$

iii) Αν $a < 0$ και $b^2 - 4ac > 0$ και $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$, θέτουμε

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$.

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I - \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\sqrt{x^2 + 2x + 2} \quad t \quad x$, τότε $x^2 + 2x + 2 = t^2 \quad 2xt + x^2$

επομένως $2x\,(1 + t) = t^2 \quad 2$ ή $x - \frac{t^2 \quad 2}{2\,(1 + t)}$ και $dx \quad \frac{t^2 + 2t + 2}{2\,(t + 1)^2}\,dt$

Συνεπώς

$$I \int \frac{1}{1 + t \quad \frac{t^2 - 2}{2t + 2}} \cdot \frac{t^2 + 2t + 2}{2(t + 1)^2}\,dt \int \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)(t + 2)^2}\,dt = \ln|t + 1| + \frac{2}{t + 2} + c$$

$$\ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 2} + c,$$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I - \int \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\,dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - tx + 1$ ή $3x^2 + 3x + 1 - t^2x^2 + 2tx + 1$ ή

$$3x + 3 = t^2x + 2t \text{ ή } x = \frac{2t \quad 3}{3 \quad t^2} \text{ και } dx \quad \frac{2t^2 - 6t + 6}{(3 - t^2)^2}\,dt$$

Εχουμε επίσης

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad \frac{2t^2 - 3t}{3 - t^2} + 1 \quad \frac{t^2 \quad 3t + 3}{3 \quad t^2}$$

Επομένως $I - \int \frac{t^2 \quad 3t + 3}{3 \quad t^2} \cdot \frac{2t^2 \quad 6t + 6}{(3 - t^2)^2}\,dt - 2\int \frac{(t^2 \quad 3t + 3)^2}{(3 \quad t^2)^3}\,dt$

$$\frac{\sqrt{3}}{9 \cdot 16}\left[6\left(\sqrt{3}\,x \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)^2 + 6\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{x} \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)\right.\right.$$

$$\left.\frac{3}{2\left(\sqrt{3}\,x \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)^2}\right| + c,$$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

Εφαρμογή 3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{xdx}{(7x - 10 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\sqrt{7x - x^2 - 10} = (x-2)t$ οπότε $x = \frac{5+2t^2}{1+t^2}$ και $dx = -\frac{6t\,dt}{(1+t^2)^2}$

Αρα έχουμε

$$I = \int \frac{-6(5+2t^2)}{27t^2}dt \quad \frac{10(x \quad 2)}{9\sqrt{7x \quad x^2 \quad 10}} - 4\frac{\sqrt{7x-x^2-10}}{g(x-2)} + c, \ c \in \mathbb{R}$$

9η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int f\left(x, \sqrt{\varrho^2 - x^2}\right)dx$

Το ολοκλήρωμα I υπολογίζεται με την αντικατάσταση $x \quad \varrho\eta\mu t = \varphi(t)$.

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{2 - x^2}}dx$

ΛΥΣΗ

Θετουμε $x = \sqrt{2}\ \eta\mu t = \varphi(t)$, $t \in \left(\ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε:

για $x \quad 0$ είναι $\sqrt{2}\ \eta\mu t \quad 0$ ή $\eta\mu t \quad 0$ ή $t = 0$,

για $x \quad 1$ είναι $\sqrt{2}\ \eta\mu t \quad 1$ ή $\eta\mu t \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$ ή $t = \frac{\pi}{4}$ και $dx = \left(\sqrt{2}\ \eta\mu t\right)'dt$

Το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3\left(\sqrt{2}\ \eta\mu t\right)^2}{\sqrt{2 - 2\eta\mu^2 t}}\left(\sqrt{2}\ \eta\mu t\right)'dt \quad \text{ή}$$

$$I \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6\,\eta\mu^2 t}{\sqrt{2}\quad \sigma\upsilon\nu\, t}\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu t\, dt \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\,\eta\mu^2 t\, dt \quad \eta$$

$$I = 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} ημ^2 t\, dt = 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - συν2t}{2}\, dt \quad ή$$

$$I = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1dt - 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} συν2t\, dt = 3\,[t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (ημ2t)'\, dt \quad ή$$

$$I = 3\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\,[ημ2t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3\pi - 6}{4}$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{xdx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $x = \frac{1}{2}ημt = φ(t)$ και $dx = (\frac{1}{2}ημt)'\,dt$

Για $x = 0$ είναι $ημt = 0$ και $t = 0$, για $x = \frac{1}{4}$ είναι $ημt = \frac{1}{2}$ και $t = \frac{\pi}{6}$.

Άρα έχουμε :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{2}ημt\left(\frac{1}{2}ημt\right)'dt}{\sqrt{1 - ημ^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{4}ημt\,συνt\,dt}{συνt} \quad ή$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} ημt\, dt = \frac{1}{4}\,[-συνt]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4}\left(-συν\frac{\pi}{6} + συν0\right) \quad ή$$

$$I = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

10η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής: $I = \int f\left(x, \sqrt{x^2 - ρ^2}\right)dx$

Το ολοκλήρωμα Ι υπολογίζεται με την αντικατάσταση $x = \frac{ρ}{συνt} = φ(t)$

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{3\sqrt{2}}^{6} x\sqrt{x^2 - 9}\, dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $x = \dfrac{3}{\sigma\upsilon\nu t} = \varphi(t),\ t \in [\,0, \dfrac{\pi}{2}\,)$.

Για $x = 3\sqrt{2}$ είναι $\sigma\upsilon\nu t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Για $x = 6$ είναι $\sigma\upsilon\nu t = \dfrac{1}{2}$ και $t = \dfrac{\pi}{3}$ και $dx = \left(\dfrac{3}{\sigma\upsilon\nu t}\right)' dt$.

Το ολοκλήρωμα γράφεται διαδοχικά:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{9}{\sigma\upsilon\nu^2 t} - 9} \cdot \left(\frac{3}{\sigma\upsilon\nu t}\right)' \cdot \frac{3}{\sigma\upsilon\nu t}\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \cdot \frac{\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu t} \cdot \frac{3\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu^2 t} \cdot \frac{3}{\sigma\upsilon\nu t}\, dt \ \text{ή}$$

$$I = 27\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi^3 t \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\, dt = 27\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi^2 t\, (\varepsilon\varphi t)'\, dt = \frac{27}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\,(\varepsilon\varphi t)^3\,\right]' dt$$

$$I = 9\left[\,(\varepsilon\varphi t)^3\,\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 9\left(\varepsilon\varphi^3\frac{\pi}{3} - \varepsilon\varphi^3\frac{\pi}{4}\right) = 9\left(3\sqrt{3} - 1\right)$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} x\sqrt{x^2 - 1}\, dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $x = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu t} = \varphi(t),\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και $dx = \dfrac{\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\, dt$

Για $x = \sqrt{2}$ είναι $\sigma\upsilon\nu t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $t = \dfrac{\pi}{4}$,

για $x = 2$ είναι $\sigma\upsilon\nu t = \dfrac{1}{2}$ και $t = \dfrac{\pi}{3}$.

Το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu t} \sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t} - 1}\ \frac{\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\, dt \quad \acute{\eta}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^2 t}{\sigma\upsilon\nu^2 t} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi^2 t \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\, dt \quad \acute{\eta}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi^2 t \cdot (\varepsilon\varphi t)'\, dt = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\varepsilon\varphi^3 t)'\, dt \quad \acute{\eta}$$

$$I = \frac{1}{3} \left[\varepsilon\varphi^3 t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}\left(\varepsilon\varphi^3 \frac{\pi}{3} - \varepsilon\varphi^3 \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right)$$

11η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής: $I = \int f\left(x, \sqrt{\alpha^2 + x^2}\right) dx$

Το ολοκλήρωμα I υπολογίζεται με την κατάσταση $x = \alpha\varepsilon\varphi t = \varphi(t)$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $x = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi t = \varphi(t)$ και $dx = \left(\frac{1}{2}\varepsilon\varphi t\right)' dx$

Το ολοκλήρωμα γραφεται:

$$I = \int \frac{1}{2}\varepsilon\varphi t \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2 t}} \left(\frac{1}{2}\varepsilon\varphi t\right)' dt = \frac{1}{4} \int \frac{\varepsilon\varphi t\,(\varepsilon\varphi t)'}{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2 t}}\, dt =$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{2\varepsilon\varphi t\,(\varepsilon\varphi t)'}{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2 t}}\, dt = \frac{1}{4} \int \frac{(1 + \varepsilon\varphi^2 t)'}{2\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2 t}}\, dt \quad \eta$$

$$I = \frac{1}{4}\int \left(\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 t}\right)' dt = \frac{1}{4}\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 t} + c$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2} + c, \quad \text{όπου} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^2 x\sqrt{4+x^2}\,dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $x = 2\varepsilon\varphi t = \varphi(t)$ $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $dx = (2\varepsilon\varphi t)'\,dt$.

Για $x = 0$ είναι $\varepsilon\varphi t = 0$ και $t = 0$ και για $x = 2$, είναι $\varepsilon\varphi t = 1$ και $t = \pi/4$.
Το ολοκληρωμα γράφεται:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\varepsilon\varphi t\sqrt{4+4\varepsilon\varphi^2 t}\,(2\varepsilon\varphi t)'\,dt \quad \text{ή}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\varepsilon\varphi t\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 t}\,\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\,dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu t}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu t}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}\,dt$$

$$I = -8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma\upsilon\nu t)'}{\sigma\upsilon\nu^4 t}\,dt$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu t = y$ και $(\sigma\upsilon\nu t)'\,dt = dy$. Άρα είναι:

$$I = -8\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{y^4} = -8\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y^{-4}\,dy = -8\left[\frac{y^{-3}}{-3}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -8\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{3}\right)$$

12η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής: $I = \int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx$

Τα ολοκληρώματα I υπολογίζονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int \sqrt{x^2+2}\, dx$

ΛΥΣΗ

$$I = \int \sqrt{x^2+2}\, dx = \int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\, dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\, dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\, dx \quad \text{ή}$$

$$I = \int x\left(\sqrt{x^2+2}\right)' dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2+2} - \int \sqrt{x^2+2}\, dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

Άρα $2I = x\sqrt{x^2+2} + 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right) + 2c$ και

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+2} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

13η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής: $I = \int h(\text{συν}x, \text{ημ}x)\, dx$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $h(-\text{ημ}x, \text{συν}x) = -h(\text{ημ}x, \text{συν}x)$, δηλαδή η h είναι περιττή ως προς το ημx. Τότε θέτουμε $\text{συν}x = t$.

ii) $h(\text{ημ}x, -\text{συν}x) = -h(\text{ημ}x, \text{συν}x)$, δηλαδη η h είναι περιττη ως προς το συνx. Τότε θέτουμε $\text{ημ}x = t$.

iii) $h(-\text{ημ}x, -\text{συν}x) = h(\text{ημ}x, \text{συν}x)$, δηλαδή η h είναι άρτια ως προς ημx και ως προς το συνx. Σ' αυτή την περίπτωση θέτουμε $\text{εφ}x = t$ ή χρησιμοποιουμε τους τυπους

$$\text{ημ}^2 x = \frac{1-\text{συν}2x}{2}, \quad \text{συν}^2 x = \frac{1+\text{συν}2x}{2}, \quad \text{ημ}x\text{συν}x = \frac{\text{ημ}2x}{2}, \quad \text{ημ}^2 x = \frac{\text{εφ}^2 x}{1+\text{εφ}^2 x},$$

$$\text{συν}^2 x = \frac{1}{1+\text{εφ}^2 x}$$

iv) Αν δεν ισχύει καμία από τις προηγουμένες περιπτώσεις κανουμε την αντικατάσταση $\text{εφ}\frac{x}{2} = t$.

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int \text{ημ}^3 x\, \text{συν}^4 x\, dx$

ΛΥΣΗ

Θετουμε συνx   t, οπότε   ημx dx   dt και το ολοκλήρωμα γραφεται διαδοχικα

$$I = \int ημ^3 x\, συν^4 x\, dx = \quad \int ημ^2 x\, συν^4 x\,(\ ημx)\, dx \quad η$$

$$I \quad \int t^4(1 \quad t^2)\,dt \quad \int t^4\, dt + \int t^6\, dt \quad \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c \quad ή$$

$$I \quad \frac{συν^5 x}{} + \frac{συν^7 x}{7} + c, \quad όπου \quad c \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^2x\, συν^5x\, dx$

ΛΥΣΗ

Θετουμε ημx   t   οποτε   συνx dx   dt   και το ολοκλήρωμα γραφεται:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^2 x\, συν^4 x \cdot συνx\, dx \quad \int_0^1 t^2(1 - t^2)^2\, dt \quad \int_0^1 (t^2 \quad 2t^4 + t^6)\, dt$$

$$I \quad \int_0^1 t^2\, dt - 2\int_0^1 t^4\, dt + \int_0^1 t^6\, dt \quad ή$$

$$I \quad \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - 2\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{t^7}{7}\right]_0^1 \quad \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \quad \frac{8}{105}$$

Εφαρμογή 3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int ημ^2x\, συν^2x\, dx$

ΛΥΣΗ

Θετουμε εφx   t, οποτε dx $\frac{dt}{1+t^2}$. Άρα έχουμε:

$$I = \int \frac{εφ^2 x}{1 + εφ^2 x} \cdot \frac{1}{1 + εφ^2 x}\, dx \quad \int \frac{t^2}{1+t^2} \quad \frac{1}{1+t^2} \quad \frac{dt}{1+t^2} \quad ή$$

$$I \quad \int \frac{t^2}{(t^2+1)^3}\, dt \quad \int \frac{t^2 + 1 \quad 1}{(t^2+1)^3} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^3}$$

Αυτά τα δύο ολοκληρώματα υπολογίζονται από αναγωγικό τύπο.

$$I_\nu = \int \frac{dt}{(1+t^2)^\nu} = \frac{2\nu-3}{2(\nu-1)} I_{\nu-1} + \frac{1}{2(\nu-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+1)^{\nu-1}}, \quad \nu \geq 2,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Άλλος τρόπος

Είναι $I = \int (\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x)^2\, dx = \int \left(\frac{\eta\mu 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \eta\mu^2(2x)\, dx =$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\sigma\upsilon\nu(4x)}{2}\, dx = \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{8}\int \sigma\upsilon\nu(4x)\, dx =$$

$$\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\int (\eta\mu(4x))'\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\eta\mu 4x + c, \text{ όπου } c \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x\ \sigma\upsilon\nu^2 x\, dx$

ΛΥΣΗ

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x\ \sigma\upsilon\nu^2 x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right) dx \quad \text{ή}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sigma\upsilon\nu 2x)^2(1+\sigma\upsilon\nu 2x)}{8}\, dx = \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sigma\upsilon\nu^3(2x) - \sigma\upsilon\nu^2(2x) - \sigma\upsilon\nu(2x) + 1]\, dx$$

$$I = \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^3(2x)\, dx - \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2(2x)\, dx - \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(2x)\, dx + \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1dx$$

Είναι όμως:

- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν2x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (ημ2x)'\, dx = \frac{1}{2}\left[ημ2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$

- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν^2 2x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + συν4x}{2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\, συν4x\, dx = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν^3(2x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν^2(2x)\, συν2x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν^2(2x)\, (ημ2x)'\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - ημ^2 2x)\, (ημ2x)'\, dx$$

Θέτουμε $y = ημ2x$ και έχουμε $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^0 (1 - y^2)\, dy = 0$

Συνεπώς είναι: $I = \frac{1}{8}\left(0 - \frac{\pi}{2} - 0 + \pi\right) = \frac{\pi}{16}$

Εφαρμογή 5

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I = \int \frac{1 + ημx}{ημx\,(1 + συνx)}\, dx$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $εφ\frac{x}{2} = t$ οπότε $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $ημx = \frac{2t}{1+t^2}$ και $συνx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \frac{1}{2}\int \left(t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{t^2}{4} + t + \frac{1}{2}\ln|t| + c \quad ή$$

$$I = \frac{εφ^2\frac{x}{2}}{4} + εφ\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|εφ\frac{x}{2}\right| + c, \quad όπου \quad c \in IR.$$

14η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής: $I_\nu = \int ημ^\nu x\,dx$ και $J_\nu = \int συν^\nu x\,dx$

$\nu \in N^* \setminus \{1\}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) ν περιττός, δηλαδή $\nu = 2k+1$, $k \in N^*$. Έχουμε:

$$I_\nu = \int ημ^{2k+1} x\,dx = \int ημ^{2k} x \cdot ημx\,dx = -\int (ημ^2 x)^k (συνx)'\,dx \quad ή$$

$$I_\nu = -\int (1 - συν^2 x)^k (συνx)'\,dx$$

Θέτουμε $συνx = u$, οπότε $(συνx)'\,dx = du$. Άρα είναι:

$$I_\nu = -\int (1 - u^2)^k\,du \ldots$$

ii) ν άρτιος, δηλαδή $\nu = 2k$, $k \in N^*$. Έχουμε:

$$I_\nu = \int ημ^{2k} x\,dx = \int (ημ^2 x)^k\,dx = \int \left(\frac{1 - συν2x}{2}\right)^k dx \quad \ldots$$

Εντελώς ανάλογα εργαζόμαστε για τα ολοκληρώματα J_ν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων J_ν, I_ν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους αναγωγικούς τύπους που ισχύουν για τα J_ν, I_ν (βλέπε την 16η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ).

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $I_1 = \int_0^\pi ημ^7 x\,dx$ ii) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^5 x\,dx$

ΛΥΣΗ

i) $I_1 = \int_0^\pi ημ^7 x\,dx = \int_0^\pi ημ^6 x \cdot ημx\,dx = -\int_0^\pi ημ^6 x\,(συνx)'\,dx =$

$$-\int_0^\pi (1 - συν^2 x)^3 (συνx)'\,dx$$

Θέτουμε $συνx = y$, οπότε $(συνx)'\,dx = dy$. Άρα είναι:

$$I_1 = -\int_{1}^{1} (1 - y^2)^3 dy = \int_{1}^{1} (1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6)\, dy \quad \text{ή}$$

$$I_1 = \left[y - 3\frac{y^3}{3} + 3\frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} \right]_{1}^{1} = \frac{32}{35}$$

ii) $$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^5 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^4 x\, (\eta\mu x)'\, dx \quad \text{ή}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta\mu^2 x)^2 (\eta\mu x)'\, dx$$

Θετουμε $\eta\mu x = t$ οπότε $(\eta\mu x)' dx = dt$ και επομένως έχουμε:

$$I_2 = \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4)\, dt \ldots \quad \text{ή}$$

$$I_2 = \int_0^1 1\, dt - 2\int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^4 dt = [t]_0^1 - 2\cdot\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

Εφαρμογή 2

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $I_1 = \int_0^{\pi} \eta\mu^4 x\, dx$ **ii)** $I_2 = \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^6 x\, dx$

ΛΥΣΗ

i) $$I_1 = \int_0^{\pi} (\eta\mu^2 x)^2 dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 - \sigma\upsilon\nu 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 - 2\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x)\, dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} 1dx - \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu 2x\, dx +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2 2x\, dx = \frac{1}{4}[x]_0^{\pi} - \frac{1}{4}[\eta\mu 2x]_0^{\pi} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{8}\int_0^{\pi} 1dx + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu 4x\, dx = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{32}[\eta\mu 4x]_0^{\pi}$$

Συνεπως $I_1 = \frac{3\pi}{8}$

ii) $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν^6 x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (συν^2 x)^3\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+συν 2x}{2}\right)^3 dx$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3\,συν\,2x + 3συν^2 2x + συν^3 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1dx + \frac{3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν\,2x\,dx + \frac{3}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν^3 2x\,dx$$

Άρα $I_1 = \frac{1}{8}\cdot\pi + \frac{3}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\cdot 0 = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{16} = \frac{5\pi}{16}$

Εφαρμογή 3

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$I = \int(αημ^2 ωt + βσυν^2 ωt)\,dt$, όπου α, β, ω, t ∈ IR, ω ≠ 0.

ΛΥΣΗ

Είναι $I = \int αημ^2 ωt\,dt + \int βσυν^2 ωt\,dt =$

$$= α\int \frac{1 - συν\,(2ωt)}{2}\,dt + β\int \frac{1 + συν\,(2ωt)}{2}\,dt =$$

$$= \int \frac{α}{2}\,dt - \frac{α}{2}\int συν\,(2ωt)\,dt + \int \frac{β}{2}\,dt + \frac{β}{2}\int συν\,(2ωt)\,dt$$

$$= \frac{α}{2}x + \frac{β}{2}x - \frac{α}{4ω}ημ\,(2ωt) + \frac{β}{4ω}ημ\,(2ωt) + c$$

$$= \frac{α+β}{2}x + \frac{β-α}{4ω}ημ\,(2ωt) + c,\quad c \in IR.$$

15η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής:

$A = \int ημ(kx)\,συν(λx)\,dx$, $B = \int ημ(kx)\,ημ(λx)\,dx$,

$Γ = \int συν(kx)\,συν(λx)\,dx$, όπου k, λ ∈ IR^*.

Τα ολοκληρωματα Α, Β, Γ μετασχηματίζονται σε απλά ολοκληρώματα με τους τυπους μετατροπης γινομένου σε άθροισμα.

Θυμίζουμε τους τύπους:

$$2\eta\mu A\ \sigma\upsilon\nu B = \eta\mu\,(A - B) + \eta\mu\,(A + B)$$

$$2\eta\mu A\ \eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\,(A - B) - \sigma\upsilon\nu\,(A+B)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\ A\ \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\,(A - B) + \sigma\upsilon\nu\,(A + B)$$

Εφαρμογή 1

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu\,(2x)\ \sigma\upsilon\nu\,(6x)\ dx\,, \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu\ x\ \sigma\upsilon\nu\ 7x\ dx\,,$$

$$\Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 3x\ \eta\mu x\ dx$$

ΛΥΣΗ

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\eta\mu 8x - \eta\mu 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 8x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 4x\,dx \quad \acute{\eta}$$

$$A = -\frac{1}{16}\left[\sigma\upsilon\nu 8x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{8}\left[\sigma\upsilon\nu 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{16}(\sigma\upsilon\nu 2\pi - \sigma\upsilon\nu 0) + \frac{1}{8}(\sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$B = \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu 7x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\sigma\upsilon\nu 8x + \sigma\upsilon\nu 6x)\,dx \quad \acute{\eta}$$

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu 8x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu 6x\,dx = \frac{1}{16}\left[\eta\mu 8x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{12}\left[\eta\mu 6x\right]_0^{\pi}$$

$$B = \frac{1}{16}\cdot 0 + \frac{1}{12}\cdot 0 = 0$$

$$\Gamma = \int_0^{\pi} \eta\mu 3x\ \eta\mu x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu 4x)\,dx \quad \acute{\eta}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}2x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{συν}4x\,dx = \frac{1}{4}\Big[\text{ημ}2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}\Big[\text{ημ}4x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = \frac{1}{4}(\text{ημ}\pi - \text{ημ}0) - \frac{1}{8}(\text{ημ}2\pi - \text{ημ}0) = 0$$

16η Κατηγορία (Αναγωγικοί τύποι)

Στις ασκήσεις αυτές έχουμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα που εξαρτώνται από τον φυσικό ν. Για να τις λύσουμε προσπαθούμε να βρούμε έναν αναγωγικό τύπο, τον οποίο εφαρμόζοντας διαδοχικά, καταλήγουμε σε γνωστό ολοκλήρωμα. Συνήθως στις ασκήσεις αυτές δουλεύουμε με την κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

Εφαρμογή 1

Να βρεθεί ένας αναγωγικός τύπος για τα επόμενα ολοκληρώματα.

i) $I_\nu = \int \text{ημ}^\nu x\,dx$ **ii)** $J_\nu = \int \text{συν}^\nu x\,dx$, $\nu \in N^*$

ΛΥΣΗ

i) Είναι $I_\nu = \int \text{ημ}^{\nu-1}x\,\text{ημ}x\,dx = -\int \text{ημ}^{\nu-1}x\,(\text{συν}x)'\,dx$

$$= -\text{ημ}^{\nu-1}x\,\text{συν}x + \int (\nu-1)\,\text{ημ}^{\nu-2}x\,\text{συν}^2x\,dx$$

$$= -\text{ημ}^{\nu-1}x\,\text{συν}x + (\nu-1)\int \text{ημ}^{\nu-2}x\,(1-\text{ημ}^2x)\,dx$$

$$= -\text{ημ}^{\nu-1}x\,\text{συν}x + (\nu-1)\int \text{ημ}^{\nu-2}x\,dx - (\nu-1)\int \text{ημ}^{\nu}x\,dx$$

$$= -\text{ημ}^{\nu-1}x\,\text{συν}x + (\nu-1)\,I_{\nu-2} - (\nu-1)\,I_\nu$$

Επομένως είναι $\boxed{I_\nu = -\frac{\text{ημ}^{\nu-1}x\,\text{συν}x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}}$, για κάθε $\nu \geq 3$.

$I_1 = \int \text{ημ}x\,dx = -\text{συν}x + c$

$$I_2 = \int ημ^2x\,dx = \int \frac{1 - συν2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}ημ2x + c,\ c \in R.$$

ii) Επειδή για $x = \frac{π}{2} - t$ είναι $συνx = συν\left(\frac{π}{2} - t\right) = ημt$, ο υπολογισμός του $J_ν$ γίνεται όπως του $I_ν$ και βρίσκουμε.

$$J_ν = \frac{ημx\,συν^{ν-1}x}{ν} + \frac{ν-1}{ν}J_{ν-2},\ \text{για κάθε } ν > 3$$

$$J_1 = \int συνx\,dx = ημx + c$$

$$J_2 = \int συν^2x\,dx = \int \frac{1+συν2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}ημ2x + c,\ c \in R.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι παραπάνω αναγωγικοί τύποι ισχύουν και για $ν \in$ **Z** και έχουμε :

$$I_ν = \int \frac{dx}{ημ^νx} = -\frac{1}{ν-1}\cdot\frac{συνx}{ημ^{ν-1}x} + \frac{ν-2}{ν-1}I_{ν-2} \quad \text{και}$$

$$J_ν = \int \frac{dx}{συν^νx} = \frac{1}{ν-1}\cdot\frac{συνx}{ημ^{ν-1}x} + \frac{ν-2}{ν-1}I_{ν-2},\quad \text{για κάθε } ν \geq 2$$

Εφαρμογή **Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:**

$$\int_0^{\frac{π}{2}} ημ^8x\,dx \quad \text{και} \quad \int_0^{\frac{π}{2}} συν^7x\,dx,$$

Εφαρμογή 2

Να βρεθεί ένας αναγωγικός τύπος για το ολοκλήρωμα

$$I_{m,ν} = \int x^m(\ln x)^ν dx \qquad m, ν \in N^*$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $h(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ και $g(x) = (\ln x)^ν$.

Τότε είναι $h'(x) = x^m$ και $g'(x) = ν(\ln x)^{ν-1}\cdot\frac{1}{x}$.

Τώρα έχουμε

$$I_{m,v} = \int h'(x)\, g(x)\, dx = h(x)\, g(x) - \int h(x)\, g'(x)\, dx \text{ , οπότε}$$

$$I_{m,v} = \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^{v} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot v\, (\ln x)^{v-1} \cdot \frac{1}{x}\, dx \quad \text{ή}$$

$$I_{m,v} = \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^{v} - \frac{v}{m+1} \int x^{m} \cdot (\ln x)^{v-1}\, dx \quad \text{ή}$$

$$I_{m,v} = \frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^{v} - \frac{v}{m+1}\, I_{m,v-1}$$

Εφαρμογή

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e x^5 (\ln x)^4 dx$

Εφαρμογή 1

Να βρεθεί ένας αναγωγικός τύπος για το ολοκλήρωμα

$$I_v = \int x^v e^{\lambda x} dx \text{ , } \lambda \neq 0 \quad v \in N$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $h(x) = x^v$ και $g(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$.

Τότε έχουμε $h'(x) = v\, x^{v-1}$ και $g'(x) = e^{\lambda x}$. Συνεπώς το I_v γραφεται

$$I_v = \int h(x)\, g'(x)\, dx = h(x)\, g(x) - \int h'(x)\, g(x)\, dx \quad \text{ή}$$

$$I_v = x^v \cdot \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} - \int v\, x^{v-1} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} dx = \frac{x^v e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{v}{\lambda} \int x^{v-1} e^{\lambda x} dx$$

$$I_v = \frac{1}{\lambda} x^v e^{\lambda x} - \frac{v}{\lambda} I_{v-1} \quad \text{για κάθε } v > 1$$

$$I_0 = \int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + c, \quad c \in R$$

Εφαρμογή

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x^7 e^{7x} dx$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΥΠΟΔΕΙΞΗ

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{συν^2x\sqrt{εφx}}$$

Υπόδειξη : $I = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(εφx)'}{2\sqrt{εφx}}\,dx = ...$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^2}{(x+α)^2(x^2+α^2)}\,dx,\ α \neq 0.$$

Υπόδειξη Θέτουμε

$$\frac{x^2}{(x+α)^2(x^2+α^2)} = \frac{A}{x+α} + \frac{B}{(x+α)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+α^2}$$

προσδιορίζουμε τους A, B, C, D....

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x-1)x^2}$$

Υπόδειξη : Θέτουμε

$$\frac{x^2}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}$$

προσδιορίζουμε τους A, B, C, D....

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}\,dx$$

Υπόδειξη : Είναι

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} = \frac{4}{(x-1)^6} + \frac{8}{(x-1)^5} + \frac{8}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$I = 4\int \frac{dx}{(x-1)^6} + 8\int \frac{dx}{(x-1)^5} + 8\int \frac{dx}{(x-1)^4} + 4\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{dx}{συν^3x}$$

Υπόδειξη : $I = \int \frac{συνx}{συν^4x}\,dx =$

$$= \int \frac{συνx}{(1-ημ^2x)^2}\,dx = \int \frac{(ημx)'}{(1-ημ^2x)^2}\,dx$$

Θέτουμε $ημx = t$, οπότε $(ημx)'dx = dt$

Άρα έχουμε

$$I = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{dx}{(1-t)^2(1+t)^2}$$

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{dx}{x(x^5+2)}$$

Υπόδειξη : $I = \int \frac{x^4}{x^5(x^5+2)}\,dx$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{(x^5)'}{x^5(x^5+2)}\,dx$$

Θέτουμε $x^5 = t$, οπότε $(x^5)'dx = dt$.

Άρα είναι : $I = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t(t+2)}$

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{dx}{2\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $x+1 = t^6$ (όπου το 6 είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 2 και 3). Έχουμε $dx = 6t^5$, οπότε

$$I = \int \frac{6t^5}{2t^3+t^2}\,dt = 6\int \frac{t^3}{2t+1}\,dt.$$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}}$$

Υποδειξη : Θέτουμε $\sqrt{4x^2+3} = t - x\sqrt{4}$

οποτε $4x^2+3 = t^2 - 2xt\sqrt{4} + 4x^2$ και

$x = \frac{t^2 - 3}{4t}$, $dx = \frac{t^2+3}{4t^2}\,dt$,

$\sqrt{4x^2+3} = \frac{t^2+3}{2t}$ ...

9. Να υπολογιστει το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $1 + x^2 = t^2$ [redacted] $2x\,dx = 2t\,dt$ ή $x\,dx = t\,dt$, οπότε

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{t+1}\,dt \ldots$$

10. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx$$

Υποδειξη : Θέτουμε $e^x + 1 = t^4$ οπότε $e^x\,dx = 4t^3\,dt$ και

$$I = \int \frac{e^x \cdot e^x}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx = \int \frac{(t^4-1)\cdot 4t^3}{t}\,dt =$$

$$= 4\int t^2(t^4-1)\,dt \ldots$$

11. Να υπολογιστει το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x(2-x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Υπόδειξη : Θετουμε $x^2 = t$ οποτε $2x\,dx = dt$. Έχουμε

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(2-x^2)\,2x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2-t}{\sqrt{t+1}}\,dt.$$

Θέτουμε $t+1 = u^2$, οποτε $dt = 2u\,du$ και

είναι $I = \frac{1}{2}\int \frac{3-u^2}{u}\,2u\,du = \int (3-u^2)\,du.$

12. Να δειξετε ότι το ολοκληρωμα

$$I = \int_0^\alpha \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha^4}}$$ δεν εξαρτάται από το α.

Υπόδειξη : Θέτουμε $x = \alpha t$, οπότε $dx = \alpha\,dt$ και το ολοκληρωμα γράφεται

$$I = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^4+1}}\,dt$$

Θέτουμε $t^2 = u$, οπότε $2t\,dt = du$ ...

13. Να υπολογιστει το ολοκληρωμα

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Υποδειξη : Θέτουμε $\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} = t$, οπότε

$1 + \sqrt[4]{x} = t^3$ ή $x = (t^3-1)^4$ και

$dx = 12\,t^2(t^3-1)^3dt.$ Άρα εχουμε :

$$I = 12\int \frac{t^3(t^3-1)^3}{\sqrt{(t^3-1)^4}}\,dt = 12\int \frac{t^3(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2}\,dt =$$

$$= 12\int t^3(t^3-1)\,dt \ldots$$

14. Να υπολογιστει το ολοκληρωμα:

$$I = \int \eta\mu\sqrt{x}\,dx$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $\sqrt{x} = t$, οποτε

$\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt$ και $dx = 2t\,dt$. Αρα

$$I = 2\int t\,\eta\mu t\,dt = -2\int t\,(\sigma\upsilon\nu t)'\,dt =$$

$$= -2t\,\sigma\upsilon\nu t + 2\int \sigma\upsilon\nu t\,dt$$

15. Να υπολογιστεί το ολοκληρωμα:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)\,dx$$

Υπόδειξη : Είναι

$$\max_{0\le x\le \frac{\pi}{2}}(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x, & \alpha\nu\ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ \eta\mu x, & \alpha\nu\ x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Έχουμε $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu x\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x\, dx \ldots$

16. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\varepsilon\varphi x}{1+\sqrt{2}\ \sigma\upsilon\nu x}\, dx$$

Υπόδειξη: Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = t$, οπότε

$dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ και $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$.

Άρα είναι $I = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t(1+\sqrt{2}\,t)\sqrt{1-t^2}}\, dt =$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dt}{t(1+\sqrt{2}\,t)} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{t} - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\,t}\right) dt \ldots$$

17. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{1+\eta\mu^4 x}}\, dx$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $\eta\mu^2 x = t$, οπότε $2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x\, dx = dt$ ή $\eta\mu 2x\, dx = dt$.

Άρα $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \ldots$

18. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \sigma\upsilon\nu x\ \sigma\upsilon\nu 3x\ \sigma\upsilon\nu 6x\, dx$$

Υπόδειξη :

$$I = \frac{1}{2}\int (2\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu 3x)\,\sigma\upsilon\nu 6x =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x)\,\sigma\upsilon\nu 6x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int 2\sigma\upsilon\nu 4x\,\sigma\upsilon\nu 6x\, dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int 2\sigma\upsilon\nu 2x\,\sigma\upsilon\nu 6x\, dx \ldots$$

19. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^6 x}$$

Υπόδειξη: $I = \int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^6 x} = \int \frac{(1+\varepsilon\varphi^2 x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx =$

$$= \int \frac{\varepsilon\varphi^4 x + 2\varepsilon\varphi^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \ldots$$

20. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$I = \int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha}$, όπου $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη : Θέτουμε $\varepsilon\varphi x = t$, οπότε

$dt = \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. Άρα είναι

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \int \frac{dt}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha\,(1+t^2)} =$$

$$= \int \frac{dt}{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha - t^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \int \frac{dt}{\eta\mu^2\alpha - t^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

$$= \frac{dt}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \cdot \frac{1}{2\varepsilon\varphi\alpha}\left[\int \frac{dt}{\varepsilon\varphi\alpha + t} + \int \frac{dt}{\varepsilon\varphi\alpha - t}\right]$$

21. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα.

$$I = \int \frac{dx}{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + 1}$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $\varepsilon\varphi\frac{x}{2} = t$, οπότε

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\eta\mu x = \frac{2t}{1+t^2}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Είναι $I=2\int \frac{dt}{3(1-t^2)+2t+1+t^2}=$

$$\int \frac{dt}{2+t-t^2}=$$

$$=\int \frac{dt}{(t+1)(t-2)} \;.....$$

22. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int \frac{e^{3x}+1}{e^{3x}}\,dx$$

Υπόδειξη : Είναι $I=\int dx+\int e^{-3x}dx...$

23. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^1 \frac{(x^2+1)}{(x+1)^{100}}\,dx$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $x+1=t$ και είναι $dx=dt$. Άρα έχουμε

$$I=\int_1^2 \frac{(t-1)^2+1}{t^{100}}\,dt=\int_1^2 \frac{t^2-2t+2}{t^{100}}\,dt...$$

24. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $\ln(x+\sqrt{1+x^2})=t$

οπότε $\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=dt$ και $I=\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} t\,dt...$

25. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :

$$I=\int \frac{\ln^3x\,dx}{x(1+\ln^2x)}$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $\ln x=t$, άρα $\frac{1}{x}dx=dt$

έχουμε $I=\int \frac{t^3}{1+t^2}\,dt...$

26. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^1 \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Υπόδειξη : Είναι

$$I=\int_0^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})'\,dx\;.$$

27. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $4+x^2=t$ οπότε $2x\,dx=dt$ και $x^2=t-4$. Άρα είναι

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{x^2\,2x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{t-4}{\sqrt{t}}\,dt...$$

28. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int x^3e^{x^2}dx$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $x^2=t$ και $2x\,dx=dt$, οπότε :

$$I=\frac{1}{2}\int 2x^2\cdot e^{x^2}\,x\,dx=\frac{1}{2}\int t\,e^t\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\int t\,(e^t)'\,dt...$$

29. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int \frac{dx}{(\alpha+bx^v)^{\frac{v+1}{v}}}$$

Υπόδειξη : Θέτουμε $\alpha+bx^v=x^vt^v$ οπότε

$$t^v=\frac{\alpha+bx^v}{x^v} \text{ και } dx=-\frac{x\,t^{v-1}}{t^v-b}\,dt$$

Άρα $I=-\frac{1}{\alpha}\int \frac{dt}{t^2}...$

30. Να βρεθεί αναγωγικός τύπος για

$$I_v=\int_\alpha^b \frac{dx}{(x^2+\lambda^2)^v}$$

Υπόδειξη : Είναι

$$I_\nu = \frac{1}{\lambda^2}\int_\alpha^b \frac{x^2+\lambda^2-x^2}{(x^2+\lambda^2)^\nu}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} I_{\nu-1} - \frac{1}{2\lambda^2}\int_\alpha^b \frac{2x^2\,dx}{(x^2+\lambda^2)^\nu} \quad (1)$$

Είναι $\int_\alpha^b \frac{2x^2}{(x^2+\lambda^2)^\nu}dx = \int_\alpha^b x\frac{2x\,dx}{(x^2+\lambda^2)^\nu}$ (2)

Θέτουμε $h(x) = \frac{1}{(x^2+\lambda^2)^{\nu-1}} = (x^2+\lambda^2)^{-\nu+1}$,

οπότε $h'(x) = \frac{1}{-\nu+1}\cdot\frac{2x}{(x^2+\lambda^2)^\nu}$ και $g(x) = x$,

άρα $g'(x) = 1$ και η (2) δίνει ....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \frac{2+x}{1+x}\,dx$$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 e^{x\ln 3}\,dx$$

3. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

i) $F_1(\lambda) = \int_\lambda^e x^2\ln x\,dx$

ii) $F_2(\lambda) = \int_\lambda^e (x^2\ln x - x^2)\,dx$

και ακόμη το $\lim_{\lambda\to 0^+} F_2(\lambda)$.

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \ln\frac{2+x}{2-x}\,dx$$

5. i) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^x \frac{2^{\ln t}}{t}\,dt$$

ii) Αν $I_\nu = \int_{e^{\nu-1}}^{e^\nu} \frac{2^{\ln t}}{t}\,dt$, να υπολογιστεί το άθροισμα $S_\nu = I_1 + I_2 + \cdots + I_\nu$.

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \ln(1+2x)\,dx$$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu^2 x}\,dx$$

9. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$$

10. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\ln 5} e^x\sqrt{e^x-1}\,dx$$

11. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^x |t|\,dt = \frac{1}{2}x|x|,\ x\in\mathbb{R}.$$

12. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι

i) $\int_0^\alpha x(1-x)\,dx = 0$

ii) $\int_0^\alpha |x(1-x)|\,dx = 0$

13. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^x (t+|t|)\,dt = \frac{|x|}{2}(x+|x|),\ x\in \mathbb{R}$$

14. Με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$A = \int_0^2 x^4 e^x\,dx$$

$$B = \int_0^1 (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x\,dx$$

15. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-1}^{1} e^{\sigma\upsilon\nu x}\,dx = 2\int_0^1 e^{\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

16. Με τη μέθοδο της αντικατάστασης να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$A = \int^2 \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$$

$$B = \int_0^1 (x^2+x+1)^{10}(2x+1)\,dx$$

$$\Gamma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sigma\upsilon\nu x\,dx$$

17. Με τη μέθοδο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$A = \int_1^e x^\nu \ln x\,dx,\ \nu\in \mathbb{N}^*$$

$$B = \int_0^\pi x^2\ \eta\mu x\,dx$$

$$\Gamma = \int_1^e \sigma\upsilon\nu(\ln x)\,dx$$

18. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{1+\eta\mu x}{\eta\mu x\,(1+\sigma\upsilon\nu x)}\,dx$$

19. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x\,(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)}\,dx$$

20. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

21. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$A = \int \frac{\eta\mu^7 x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx \qquad B = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{\eta\mu x}\,dx$$

22. Να δείξετε ότι:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{4\ln 2}{\sqrt{3}}$$

23. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \sqrt{\frac{(x+1)^3}{x-1}}\,dx$$

24. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\,dx$$

25. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^4+\alpha}{(x^2+x+1)^\nu}\,dx$$

26. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^4+1}{(x^2-1)^3}\,dx$$

27. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,dx$$

28. Έστω $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sigma\upsilon\nu x)\,dx$,

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\eta\mu x)\,dx,$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\eta\mu 2x)\,dx = \int_0^{\pi} \ln \eta\mu u \,\frac{du}{2}$$

Να δείξετε ότι $A = B$, $C = 2A + \frac{\pi}{2}\ln 2$.

29. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\,dx .$$

30. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx .$$

31. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi} (x\,\sigma\upsilon\nu x)^2\,dx .$$

32. Να υπολογιστει το ολοκληρωμα

$$I = \int \frac{e^{3x}}{e^x + 1}\,dx .$$

33. Να υπολογιστουν τα ολοκληρώματα:

$$A = \int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}\,dx ,\quad B = \int \frac{x^5}{(1+x^3)^2}\,dx .$$

34. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_\alpha^b h(x)\,dx \quad \mu\varepsilon \quad h(x) = \sqrt{(x-\alpha)(b-x)}$$

$\alpha < b$, $[\alpha, b] \to R$.

35. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx .$$

36. Να υπολογιστει το ολοκληρωμα

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\eta\mu 2x}\,dx .$$

37. Να βρεθεί αναγωγικος τύπος για

$$I_\nu = \int_\alpha^b \frac{dx}{(x^2 - \lambda^2)^\nu},\quad \nu > 1$$

38. Αν $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x - 1}$, $m \in (1, \infty)$.

Να υπολογιστουν τα ολοκληρώματα :

i) $\displaystyle\int_1^2 h(x)\,dx$ ii) $\displaystyle\int_1^m h(x)\,dx$

39. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_\alpha^b e^{kx}\,\sigma\upsilon\nu(\lambda x)\,dx \quad \kappa\alpha\iota$$

$$I_2 = \int_\alpha^b e^{kx}\,\eta\mu(\lambda x)\,dx$$

40. Να υπολογιστει το ολοκλήρωμα

$$I_\nu = \int_\alpha^b \frac{dx}{(\lambda x^2 + \gamma x + \delta)^\nu}$$

41. Με τη μέθοδο της αντικατάστασης να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} \qquad B = \int_1^2 \frac{\ln t}{t}\,dt$$

42. Αν $I_\nu = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^\nu x\,dx$, $\nu \in N$, $\nu > 2$

να αποδειχθεί ότι είναι:

i) $I_{\nu+2} = (\nu+1) I_\nu - (\nu+1) I_{\nu+2}$ και μετα να υπολογιστεί το I_4.

ii) $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} \frac{I_{2\nu+1}}{I_{2\nu}} = 1$

iii) $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2\nu)}\right]^2 (2\nu+1) = \frac{2}{\pi}$,

τύπος Wallis.

43. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int_1^e x(\ln x)^2\,dx$$

$$I_2 = \int_0^1 e^{\alpha x}\,\eta\mu x\,dx,\ \alpha \in R.$$

44. Αν $I_\nu = \int_0^1 x^\nu\,\eta\mu(\pi x),\ \nu \in N$, να δειχθεί ότι $I_{\nu+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{\pi^2} I_\nu,\ \nu \in N$ και έπειτα υπολογίστε το I_2.

45. Δείξτε ότι:

$$\int_\alpha^b \left(\int_\gamma^\delta (x+y)\,dy\right) dx = \frac{\delta^2 - \gamma^2}{2}(b-\alpha) + (\delta - \gamma)\frac{b^2 - \alpha^2}{2}$$

46. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $I_1 = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

ii) $I_2 = \int_1^3 \frac{x^2+1}{x^3+3x+4}\,dx$

iii) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{(3+\sigma\upsilon\nu x)^2}\,dx$

iv) $I_4 = \int_{e^3}^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

v) $I_5 = \int_{\frac{(\pi-3)}{6}}^{\frac{(\pi-2)}{4}} \eta\mu(2x+1)\,dx$

47. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\sigma\upsilon\nu t} - \sqrt{\eta\mu t})\,dt$$

48. Έστω η συνάρτηση $h : [-1, +\infty)$ με

Υπολογίστε τη συνάρτηση F με

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{t+1}}.$$

49. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 t^2 e^{t}\,dt.$$

50. Έστω $I_\nu(x) = \int_0^x t^\nu\,\eta\mu t\,dt$.

i) Δείξτε ότι $I_\nu(x) = -x^\nu\,\sigma\upsilon\nu x + \nu x^{\nu-1}\eta\mu x - \nu(\nu-1)I_{\nu-2}(x)$

ii) Βρείτε $I_0(x)$, $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$.

51. Έστω $J_\nu(x) = \int_0^x t^\nu\,\sigma\upsilon\nu t\,dt$.

i) Βρείτε αναγωγικό τύπο μεταξύ J_ν και $J_{\nu-2}$

ii) Υπολογίστε J_0, J_1, J_2, J_3.

52. Έστω $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^{2\nu+1}x},\ \nu \in N$

i) Βρείτε $\alpha, b \in R$ ώστε να ισχύει για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\alpha\,\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \frac{b\,\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$$

και υπολογίστε το I_0.

ii) Δείξτε ότι $2\nu I_\nu - (2\nu-1)\,I_{\nu+1} - \frac{2^\nu}{\sqrt{2}}$.

Υπολογίστε το I_2.

53. Έστω $I(\alpha,\nu) = \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\nu\,dx,\ \alpha \in N^*$,

και $I(\alpha,0) = \int_0^1 x^\alpha\,dx$.

i) Δείξτε ότι $I(\alpha+1,\nu) = \frac{\alpha+1}{\nu+1} I(\alpha,\nu+1)$

ii) $I(\alpha, \nu) - I(\alpha, \nu+1) = I(\alpha+1, \nu)$ και

$$I(\alpha, \nu+1) = \frac{\nu+1}{\nu+\alpha+2}\, I(\alpha, \nu).$$

iii) Για σταθερό $\alpha \in N^*$ υπολογίστε $I(\alpha, 0)$ και δείξτε ότι

$$I(\alpha, \nu) = \frac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (\nu-1)\nu}{(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+\nu+1)} \text{ για κάθε } \nu \in N^*.$$

54. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$$I_2 = \int_3^2 \frac{x^2}{(x+1)^3(x-1)^2}\,dx$$

55. Να υπολογιστούν τα ολοκληρωματα

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$I_2 = \int_{-3}^2 \frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$$

$$I_3 = \int_2^3 \frac{4x^2+x+4}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$$

56. Υπολογιστε τα ολοκληρώματα

i) $\int_6^4 |x^2 - 2x - 3|\,dx$

ii) $\int_0^\nu (|x-1|+|x-2|+...+|x-\nu|)\,dx$, $\nu \in N^*$

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\,συν^2x + ημ^4x)\,dx$

iv) $\int_0^{2\pi} (|ημx| + |συνx|)\,dx$

v) $\int_1^3 \frac{|x-3|+k}{x-k+3}\,dx$

vi) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+5)^3}}$

vii) $\int_0^1 \frac{4^x+1}{2^x+1}\,dx$

viii) $\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

57. Να βρεθει αναγωγικός τύπος για το ολοκλήρωμα

$$I_{m,\nu} = \int ημ^m x\, συν^\nu x\,dx$$

58. Να βρεθει αναγωγικός τύπος για το ολοκλήρωμα

$$I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{\alpha x^2 + bx + c}}\,dx,$$

όπου $m \in N$ και $\alpha \neq 0$

59. Να βρεθει αναγωγικός τύπος γαι το ολοκλήρωμα

$$I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

1.10 Εφαρμογές των ορισμένων ολοκληρωμάτων

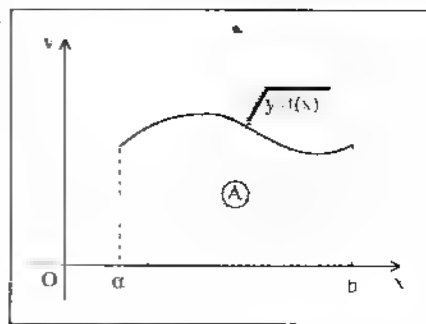
Στην παραγραφο αυτή χρησιμοποιούμε το ορισμένο ολοκλήρωμα για να υπολογίσουμε διάφορα μεγέθη, όπως εμβαδόν διαφόρων χωρίων, όγκο στερεών από περιστροφή και έργο δύναμης.

α) Εμβαδόν επίπεδου χωρίου που ορίζεται από μια συνάρτηση.

Περίπτωση 1.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3 αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, b] και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, b]$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$ μας δίνει το εμβαδό της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x)$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = b$ ή όπως λέμε το χωρίο Α σχ. 1 έχει εμβαδόν

$$\mathbf{E(A) = \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx}$$



σχημα 1

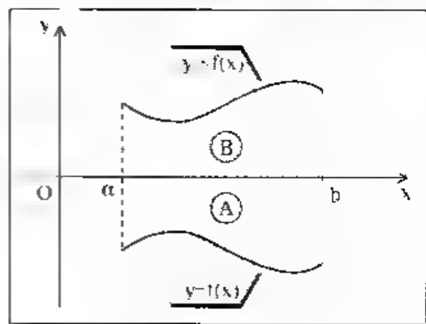
Περίπτωση 2.

Αν $f(x) < 0$, για κάθε $x \in [\alpha, b]$, σχ. 2, τότε $\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx < 0$, οπότε το ολοκλήρωμα αυτό δεν εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου Α. Το χωρίο Β που είναι συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα x΄x ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης -f, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = b$ και τον άξονα x΄x. Επομένως σύμφωνα με την 1η περίπτωση έχουμε:

$$E(B) = \int_{\alpha}^{b} (-f(x))\,dx = -\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$$

Επειδή τα χωρία Α και Β έχουν ίσα εμβαδά (λόγω συμμετρίας είναι ίσα γεωμετρικά σχήματα), το χωρίο Α έχει εμβαδό

$$\mathbf{E(A) = -\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx}$$



σχήμα 2

Από όσα προαναφέραμε συμπεραίνουμε λοιπόν την πρόταση.

Προταση

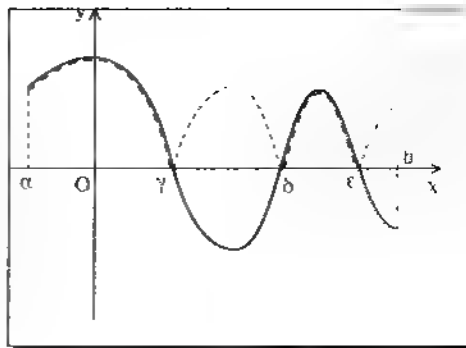
Αν η συνεχής συνάρτηση f στο [α, b] διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε το εμβαδόν του χωρίου Α που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, του άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x = α και x = b είναι:

$$E(A) = \left|\int_\alpha^b f(x)\,dx\right| = \int_\alpha^b |f(x)|\,dx$$

Περίπτωση 3η

Η συνάρτηση f είναι κατά τμήματα θετική και αρνητική στο [α, b] (σχ. 3).

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου Α που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = α, x = b και τον άξονα x΄x, είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της | f | (με τη διακεκομένη γραμμή) τις ευθείες x = α, x = b και τον άξονα x΄x. Επομένως



σχήμα 3

$$E(A) = \int_\alpha^b |f(x)|\,dx$$

η πιο αναλυτικά για τη συνάρτηση του σχήματος 3 ισχύει:

$$E(A) = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx - \int_\gamma^\delta f(x)\,dx + \int_\delta^\varepsilon f(x)\,dx - \int_\varepsilon^b f(x)\,dx$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή

- Για να βρούμε το Ε(Α) βρίσκουμε τις ρίζες ϱ_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ της f στο [α, b]

Είναι τότε : $E(A) = \left|\int_\alpha^{\varrho_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} f(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{\varrho_\nu}^{b} f(x)\,dx\right|$ με $\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_\nu$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + x$ την ευθεία $x = \frac{1}{2}$ και από τους δυο άξονες

ΛΥΣΗ

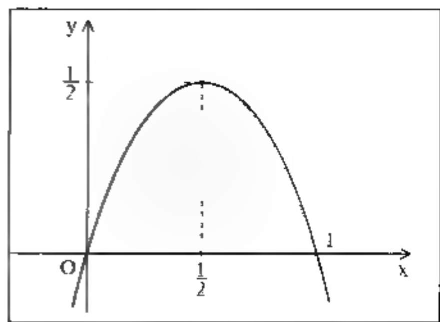
Ο άξονας των y έχει εξίσωση x = 0. Έχουμε λοιπόν :

$E = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, dx$ και επειδή

$-x^2 + x \geq 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ είναι

$E = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-x^2 + x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$ τ.μ.



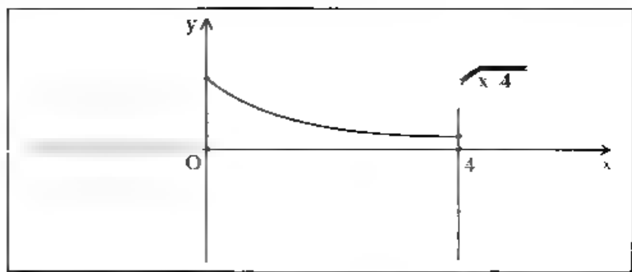
Παρατήρηση

- Η ευθεία $x = 1/2$ χωρίζει το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα των x και την c_f σε δύο ισεμβαδικά μέρη (ισοδύναμα).

Εφαρμογή 2

Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες x΄x, y΄y, την ευθεία x = 4 και την καμπύλη c_f της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

ΛΥΣΗ



Ο άξονας των y έχει εξίσωση $x = 0$. Έχουμε λοιπόν:

$E = \int_0^4 \left|\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right| dx = \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$ γιατί $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 4]$.

Θέτουμε $\sqrt{x} = t$ τότε $\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = dt$.

Για $x = 0$ είναι $t = 0$ και για $x = 4$ είναι $t = 2$. Επομένως

$E = \int_0^4 \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}\, dx = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\, dt = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$

$= 2\left[t - \ln(1+t)\right]_0^2 = 4 - 2\ln 3$ τ.μ

Εφαρμογή 3

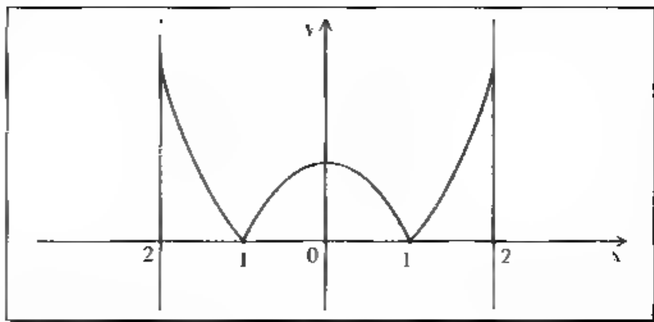
Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x^2 - 1|$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = - 2 και x = 2

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο [- 2, 2] επομένως

$$E = \int_{-2}^{2} |f(x)|\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\, dx .$$



Εχουμε $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{αν } x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1, & \text{αν } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$ (οι ρίζες της f είναι - 1 και 1).

Επομένως $E = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx + \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)\, dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{2} = 4 \text{ τ.μ.}$$

Παρατήρηση

- Επειδή η f είναι άρτια συνάρτηση μπορούμε να γράψουμε

$$E = 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)\, dx + 2\int_{1}^{2} (x^2 - 1)\, dx = 4$$

Εφαρμογή 4

Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση (c) της συνάρτησης f με $f(x) = -\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ και τον άξονα x΄Ox.

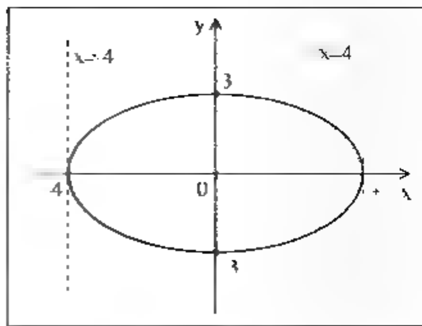
ΛΥΣΗ

Η f έχει πεδίο ορισμού A = [- 4, 4]. Βρίσκουμε πρώτα τα σημεία τομής της (c) με τον άξονα x΄x.

Έχουμε: $f(x) = 0$ ή $-\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2} = 0$ ή $16 - x^2 = 0$ ή $x = \pm 4$.

Αρα ζητάμε τώρα το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την (c) τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x = - 4 και x = 4. Η συνάρτηση f είναι συνε -

χής στο $[-4, 4]$ και για κάθε $x \in [-4, 4]$ είναι



$f(x) = -\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \le 0$ άρα είναι

$$E = \int_{-4}^{4} |f(x)|\,dx = \int_{-4}^{4} \left| -\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \right| dx \quad \text{ή}$$

$$E = \frac{3}{4}\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx = 2\,\frac{3}{4}\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx \quad (1)$$

Θέτουμε $x = 4\eta\mu t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Για $x = 0$ είναι $\eta\mu t = 0$ ή $t = 0$ και για $x = 4$ είναι $\eta\mu t = 1$ ή $t = \frac{\pi}{2}$.

Από την (1) έχουμε: $E = \frac{3}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 - 16\eta\mu^2 t}\,(4\eta\mu t)'\,dt$

$$E = \frac{3}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 4\sigma\upsilon\nu t \cdot 4\sigma\upsilon\nu t\,dt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 t\,dt$$

$$E = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2t}{2}\,dt = 12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sigma\upsilon\nu 2t)\,dt$$

$$E = 12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt + 12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu 2t\,dt = 12\,\frac{\pi}{2} + 6\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu 2t)'\,dt$$

$$= 6\pi + 6\left[\eta\mu 2t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi \ \text{τ.μ}$$

Εφαρμογή 5

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = 4\alpha x$ και την ευθεία $x = \alpha$, $\alpha > 0$.

ΛΥΣΗ

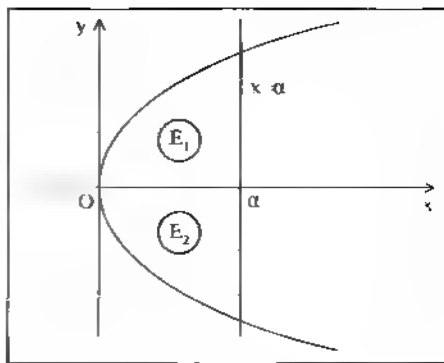
Η παραβολή $y^2 = 4\alpha x$ έχει κορυφή το σημείο (0, 0).

Έχουμε $y = \pm 2\sqrt{\alpha x}$. Ο κλάδος της παραβολής που βρίσκεται πάνω από τον άξονα των $x'x$ έχει εξίσωση $y = 2\sqrt{\alpha x}$.

$$E = 2E_1 = 2\int_0^{\alpha} 2\sqrt{\alpha x}\, dx =$$

$$= 4\int_0^{\alpha} \sqrt{\alpha x}\, dx = 4\sqrt{\alpha}\int_0^{\alpha} \sqrt{x}\, dx =$$

$$= 4\sqrt{\alpha}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\alpha} = \frac{8\alpha^2}{3} \text{ τ.μ}$$



Εφαρμογή 6

Έστω παραβολή $y = f(x) = \alpha x^2 + bx + \gamma$ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τη χορδή ΑΒ δίνεται από τη σχέση $E^2 = \dfrac{(b^2 - 4\alpha\gamma)^3}{36\alpha^4}$.

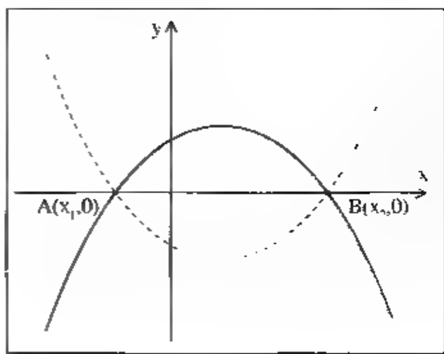
ΛΥΣΗ

Εφ' όσον η παραβολή τέμνει τον $x'x$ θα έχει ρίζες πραγματικές. Έστω x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + bx + \gamma = 0$ (άρα $b^2 - 4\alpha\gamma > 0$).

Είναι $E = \int_{x_1}^{x_2} |\alpha x^2 + bx + \gamma|\, dx$.

Επειδή στο $[x_1, x_2]$ το $\alpha x^2 + bx + \gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο έχουμε:

$$E = \left|\int_{x_1}^{x_2} (\alpha x^2 + bx + \gamma)dx\right|$$



Είναι

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (\alpha x^2 + bx + \gamma)\, dx$$

$$= \frac{\alpha}{3}(x_2^3 - x_1^3) + \frac{b}{2}(x_2^2 - x_1^2) + \gamma(x_2 - x_1) \quad \text{ή}$$

$$I = \frac{\sqrt{b^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}\left[\frac{\alpha}{3}\left(\frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}\right) + \frac{b}{2}\left(-\frac{b}{\alpha}\right) + \gamma\right] = \frac{\sqrt{b^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha} \cdot \frac{4\alpha\gamma - b^2}{6\alpha} \quad \text{επομένως,}$$

$$E^2 = |I|^2 = I^2 \quad \text{ή} \quad E^2 = \frac{(b^2 - 4\alpha\gamma)(b^2 - 4\alpha\gamma)^2}{36\alpha^4} = \frac{(b^2 - 4\alpha\gamma)^3}{36\alpha^4}$$

Παρατήρηση

- Αν $x_1 < x_2$ τότε ισχύει:

$$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{b^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}, \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{\alpha^2} - \frac{2\gamma}{\alpha}$$

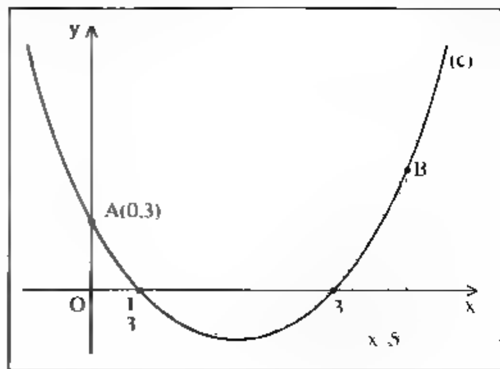
Εφαρμογή 7

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$ τον άξονα x΄Ox και των ευθειών με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 5$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$ είναι συνεχής στο ℝ έχει ρίζες $\frac{1}{3}$, 3 και 3 και το πρόσημο αυτής δίνεται από τον πίνακα

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
f(x)		+	0	-	0	+	



Το εμβαδό χωρίου που περικλείεται από την (c), τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 5 είναι

$$E = \left| \int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{\frac{1}{3}}^{3} f(x)\,dx \right| + \left| \int_3^5 f(x)dx \right| \quad (1)$$

Είναι :

- $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (3x^2 - 10x + 3)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3} - 10\frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^{\frac{1}{3}} =$

$$= \left[x^3 - 5x^2 + 3x \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{13}{27}$$

- $\int_{\frac{1}{3}}^{3} f(x)\,dx = \left[x^3 - 5x^2 + 3x \right]_{\frac{1}{3}}^{3} = -9 - \frac{13}{27}$

- $\int_3^5 f(x)\,dx = \left[x^3 - 5x^2 + 3x \right]_3^5 = 24$

Άρα από (1) έχουμε $E = \frac{13}{27} + \left| -9 - \frac{13}{27} \right| + 24$ τ.μ

$$E = \int_0^{32} \frac{10}{t^{1/5}(t+2)\cdot 5t^{4/5}}\, dt = \int_0^{32} \frac{2dt}{t(t+2)} = \int_0^{32} \frac{2dt}{t(t+2)} =$$

$$2\int_1^{32} \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{t+2}\right) = \int_1^{32} \frac{1}{t}\, dt - \int_1^{32} \frac{1}{t+2}\, dt =$$

$$= \left[\ \ln t\ \right]_1^{32} - \left[\ \ln(t+2)\ \right]_1^{32} = \ln 32 - \ln 34 + \ln 3 = \ln\frac{48}{17} \ \text{τ.μ}$$

Εφαρμογή 10

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x + \frac{1}{2x^2}$.

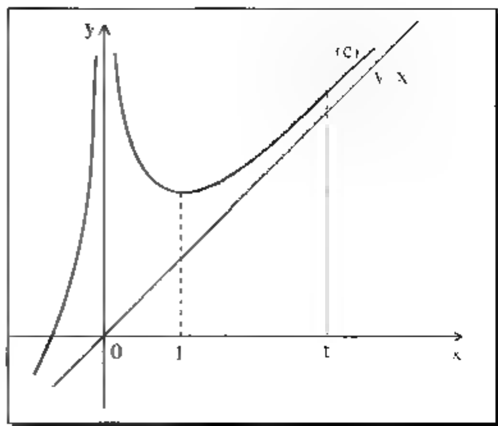
α) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση (c) της f τον άξονα x΄Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = t$ με $t > 1$.

β) Έστω E(t) το εμβαδό του προηγούμενου χωρίου. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t)$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f με $f(x) = x + \frac{1}{2x^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ και για $x \in [1, t]$, με $t > 1$ είναι $f(x) = x + \frac{1}{2x^2} > 0$.

Άρα το εμβαδό E(t) που ορίζεται από την (c), τον άξονα x΄Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$, $x = t$, $t > 1$ είναι:



$$E(t) = \int_1^t f(x)\, dx = \int_1^t \left(x + \frac{1}{2x^2}\right) dx =$$

$$= \int_1^t \left(x + \frac{1}{2}\, x^{-2}\right) dx \quad \text{ή}$$

$$E(t) = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x}\right]_1^t = \frac{t^3-1}{2t}\ ,\quad t > 1$$

β) Είναι $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^3-1}{2t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^3}{2t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2}{2} = +\infty$

Εφαρμογή 11

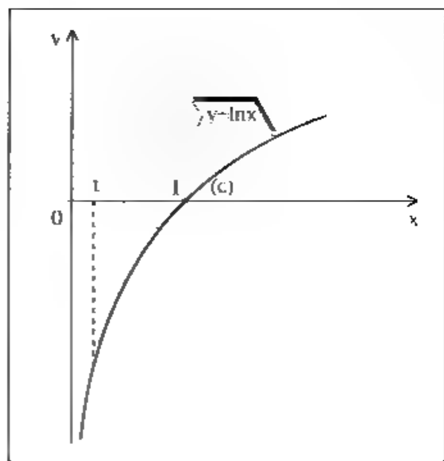
i) Να βρεθεί το εμβαδό E(t) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \ln x$ τον άξονα x΄Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = t$, $(0 < t < 1)$.

ii) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση E(t), $0 < t < 1$ έχει τοπικό ακρότατο.

iii) Υπολογίστε το όριο : $\lim\limits_{t \to 0^+} E(t)$.

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in [t, 1]$ με $0 < t < 1$ είναι $f(x) < 0$ άρα το εμβαδόν E(t) του χωρίου που περικλείεται από την (c) του άξονα x΄Ox και τις ευθείες $x = t$ και $x = 1$ είναι



$$E(t) = \int_t^1 |f(x)|\,dx = \int_t^1 |\ln x|\,dx =$$

$$\int_t^1 (-\ln x)\,dx = \int_1^t \ln x\,dx \text{ ή}$$

$$E(t) = \int_1^t 1 \cdot \ln x\,dx = \int_1^t (x)' \ln x\,dx \text{ ή}$$

$$= [\,x \ln x\,]_1^t - \int_1^t x \cdot (\ln x)'\,dx \text{ ή}$$

$$E(t) = t\ln t - \int_1^t x \cdot \frac{1}{x}\,dx = t\ln t - \int_1^t 1dx \text{ ή}$$

$$E(t) = t\ln t - [\,x\,]_1^t = t\ln t - t + 1, \ t \in (0, 1).$$

ii) Είναι $E(t) = t\ln t - t + 1$. Έχουμε $E'(t) = \ln t + 1 - 1 = \ln t < 0$ για κάθε $t \in (0, 1)$ άρα η E(t) γνησίως φθίνουσα στο (0, 1) και συνεπώς δεν έχει ακρότατο.

iii) Είναι $\lim\limits_{t \to 0^+} E(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} (t\ln t) + \lim\limits_{t \to 0^+} (-t + 1)$

$$\lim_{t \to 0^+} E(t) = \lim_{t \to 0^+} (t\ln t) + 1 = \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} + 1 \quad \left(\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$\lim_{t \to 0^+} E(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{(\ln t)'}{\left(\frac{1}{t}\right)'} + 1 = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} + 1 = 0 + 1 = 1 \text{ τ.μ.}$$

Εφαρμογή 12

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν E(α) που περικλείεται από τη γραφική παράσταση (c) της f, του άξονα x΄x και τις ευθείες x = e και x = α , 0 < α < 1.

iii) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} E(\alpha)$.

ΛΥΣΗ

i) Είναι f(0) = 0 και $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 \ln x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right)$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0 = f(0)$$

επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

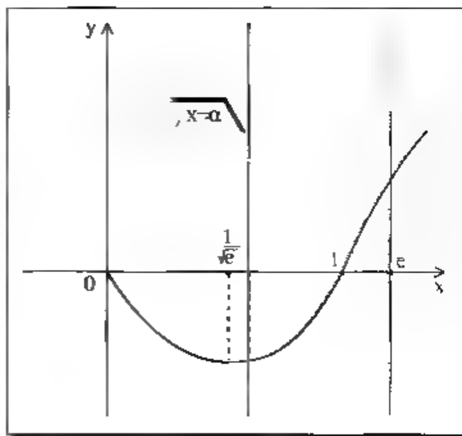
ii) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των x΄x.

Ένα σημείο είναι το (0, 0). Παίρνουμε τώρα f(x) = 0, x > 0.

Είναι $x^2 \ln x = 0$ ή $\ln x = 0$ άρα x = 1.

Για $x \geq 1$ είναι $f(x) = x^2 \ln x \geq 0$ και για $0 < x < 1$ είναι $x^2 \ln x < 0$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι:



$$E(\alpha) = \int_\alpha^1 |f(x)|\, dx + \int_1^e |f(x)|\, dx = E_1 + E_2$$

Έχουμε :

$$E_1 = \int_\alpha^1 x^2 \ln x\, dx = -\int_1^\alpha x^2 \ln x\, dx = -\left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^\alpha + \int_1^\alpha \frac{x^3}{3} (\ln x)'\, dx =$$

$$-\frac{\alpha^3}{3} \ln\alpha + \frac{1}{3}\int_1^\alpha x^2\, dx = -\frac{\alpha^3}{3} \ln\alpha + \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^\alpha = -\frac{\alpha^3}{3} \ln\alpha + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha^3}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$E_2 = \int_1^e \left(x^2 \ln x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9} \text{ τ.μ}$$

Επομένως $E(\alpha) = E_1 + E_2 = \frac{\alpha^3}{3}\ln\alpha - \frac{1}{9}\alpha^3 + \frac{1}{9} + \frac{2e^3+1}{9}$ τ.μ

iii) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} E(\alpha) = \frac{1}{3}\lim\limits_{\alpha \to 0^+}\left(\alpha^3 \ln\alpha\right) + \frac{1}{9} + \frac{2e^3+1}{9} = \frac{2e^3+2}{9}$

$\left(\text{είναι } \lim\limits_{\alpha \to 0^+}\left(\alpha^3\ln\alpha\right) = 0 \text{ με L' Hospital}\right)$

Εφαρμογή 13

Έστω η συνάρτηση h με $h(x) = \ln\left(1+\frac{1}{|x-1|}\right)$, $x \neq 1$.

Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της IR, τους άξονες Ox και Oy και την ευθεία $x = \frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

Στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ είναι $x - 1 < 0$ άρα $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{1-x}\right) = \ln\frac{2-x}{1-x}$.

Προφανώς για καθε $x \neq 1$ είναι $\ln\left(1+\frac{1}{|x-1|}\right) > 0$.

Επομένως

$$E = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln\frac{2-x}{1-x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(2-x)\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-x)\,dx$$

Έστω $I = \int \ln(\alpha - x)\,dx$, θέτουμε $\alpha - x = t$, $dx = -dt$

$$I = -\int \ln t\,dt = -\int (t)' \ln t\,dt = -t\ln t + \int 1dt = -t\ln t + t + c$$

$$= t(1-\ln t) + c = (\alpha - x)\left[1 - \ln(\alpha - x)\right] + c$$

Τότε $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(2-x)\,dx = -\left(2-\frac{1}{2}\right)\left[1-\ln\left(2-\frac{1}{2}\right)\right] + 2(1-\ln 2) =$

$$-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} + 2 - 2\ln 2 = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{\frac{3^3}{2^3}} - \ln 4$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-x)\,dx = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\ln\frac{1}{2}\right)-(1-\ln 1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-1$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.$$

Άρα $E = -\frac{1}{2}-\ln\sqrt{\frac{3^3}{2^3}}+\ln 4+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$$=\ln\sqrt{\frac{1}{2}}+\ln 4-\ln\sqrt{\frac{3^3}{2^3}}=\ln\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{3^3}\cdot 4^2}=\frac{3}{2}\ln\frac{4}{3}$$

Εφαρμογή 14

Αν x_0 είναι η τιμή του x για την οποία η συνάρτηση $f(x)=\frac{2\ln x-1}{x^2}$ παρουσιάζει ακρότατο, βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο την γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και $x = x_0$.

ΛΥΣΗ

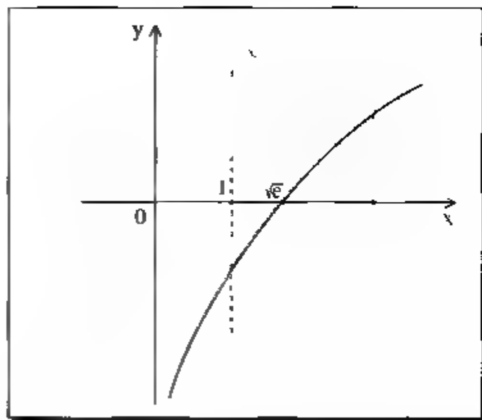
Η f ορίζεται για κάθε $x > 0$.

Είναι $f'(x)=\frac{4(1-\ln x)}{x^3}$.

Έχουμε τον πίνακα:

x	0		e		+∞
f′		+	0	-	
f		↗		↘	

από τον οποίο συμπεραίνουμε ότι η f έχει μέγιστο για $x_0 = e$.



Έχουμε $f(x)\geq 0$ ή $2\ln x-1\geq 0$ ή $\ln x\geq\frac{1}{2}$ ή $x\geq\sqrt{e}$ οποτε για κάθε $x\in[\sqrt{e}, e]$ είναι $f(x) > 0$, και για καθε $x\in[1, \sqrt{e}]$ ειναι $f(x) < 0$. Ακόμη η f είναι συνεχης στο $(0, +\infty)$ αρα το ζητούμενο εμβαδό ειναι:

$$E=\int_1^e |f(x)|\,dx=\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1-2\ln x}{x^2}\right)dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{2\ln x-1}{x^2}\,dx$$

Εχουμε

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1-2\ln x}{x^2}\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x^2}\,dx - 2\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}} - 2\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

Είναι : $\displaystyle\int_\alpha^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int_\alpha^b \ln x\left(-\frac{1}{x}\right)'dx = -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_\alpha^b + \int_\alpha^b \frac{1}{x^2}\,dx =$

$$= -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_\alpha^b + \left[-\frac{1}{x}\right]_\alpha^b \quad (0 < \alpha < b).$$

Επομένως

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1-2\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}} + 2\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\sqrt{e}} - 2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}} + 2\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\sqrt{e}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{e}} + 1 + 2\,\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{2}{\sqrt{e}} = 1$$

Ειναι ακόμη

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{2\ln x - 1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\sqrt{e}}^{e} - 2\left[\frac{\ln x}{x}\right]_{\sqrt{e}}^{e} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{\sqrt{e}} - 2\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{2\sqrt{e}}\right) =$$

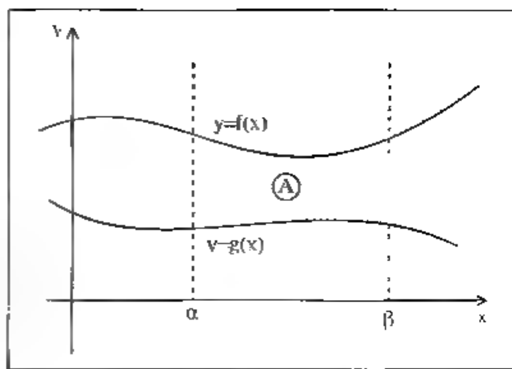
$$= \frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{3}{e}$$

Επομένως $\quad E = \dfrac{2}{\sqrt{e}} - 1 + \dfrac{2}{\sqrt{e}} - \dfrac{3}{e} = \dfrac{4}{\sqrt{e}} - \dfrac{3}{e} - 1$ τ.μ

β) Εμβαδόν χωρίου μεταξύ των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του εμβαδού του χωριου Α, που περικλείεται μεταξυ των γραφικων παραστάσεων δυο συνεχών συναρτήσεων f, g και των ευθειών $x = \alpha$, $x = b$ διακρινουμε τρεις περιπτωσεις:

1η περίπτωση: **$f(x) < g(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, b]$**

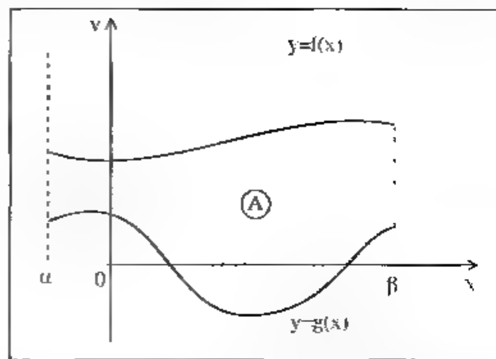


Το ζητουμενο εμβαδό Ε(Α) είναι: Η διαφορά των εμβαδών που ορίζουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, οι ευθειες x = α, x = b και ο άξονας x΄x. Επομενως το ζητούμενο εμβαδό ειναι.

$$E(A) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

2η περίπτωση. **f(x) < g(x) για κάθε x∈ [α, b].** (Χωρίς να ειναι θετικές · σχ 5) Το εμβαδόν του χωρίου Α δίνεται πάλι από τον τύπο :

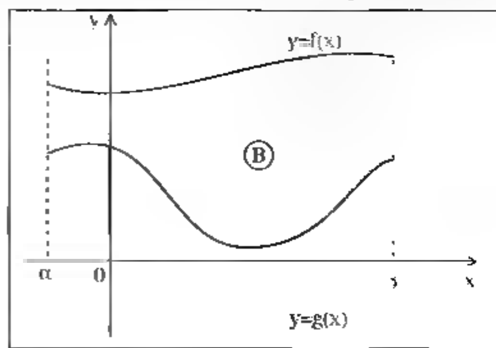
$$E(A) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$



πράγματι:

Επειδη οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα [α, b] θα ειναι και φραγμένες άρα υπαρχει αριθμός x∈ ℝ τέτοιος f(x) ≥ g(x) > k. Θεωρούμε τις συναρτησεις F(x) f(x) - k, G(x) g(x) - k οι οποίες προφανώς ειναι συνεχεις στο [α, b] με F(x) G(x) f(x) - g(x) > 0, και επειδή τα εμβαδα των χωρίων Α και Β ειναι ίσα θα έχουμε.

$$E(A) = \int_a^b \big(F(x) - G(x)\big)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

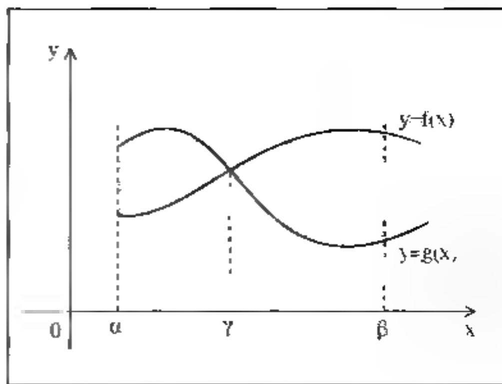


3η περίπτωση. Η διαφορά f(x) - g(x) δεν έχει σταθερό πρόσημο στο [α, b] σχ.6.

Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου A είναι:

$$\mathbf{E(A) = \int_{\alpha}^{b}\big(f(x) - g(x)\big)\,dx}$$

Αναλυτικά, στην περίπτωση του σχήματος 6 έχουμε



σχήμα 6

$$E(A) = \int_{\alpha}^{\gamma}\big(f(x) - g(x)\big)\,dx + \int_{\gamma}^{b}\big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

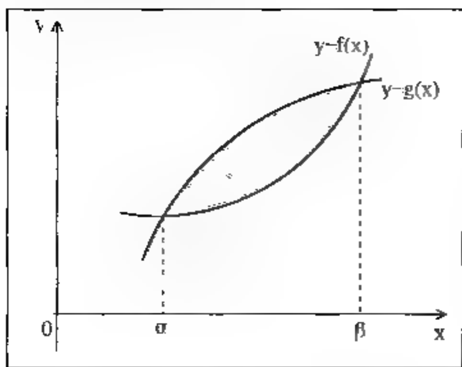
Παρατήρηση

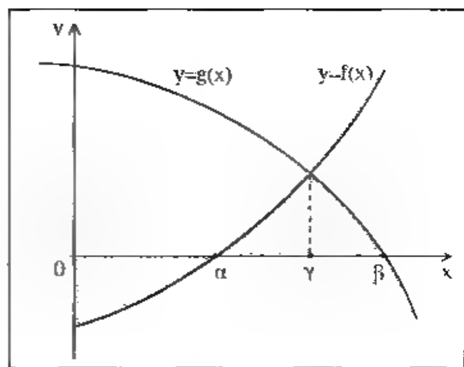
- Θυμίζουμε ότι, όταν έχουμε τις συναρτήσεις f(x), g(x) οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων αυτών είναι οι ρίζες της εξίσωσης f(x) = g(x).
- Όπως θα φανεί και στα επόμενα, μια από τις κυριότερες δυσκολίες που συναντάμε όταν αναζητούμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας, είναι ο ακριβής προσδιορισμός αυτής. Τη δυσκολία αυτή μπορούμε να τη ξεπεράσουμε με την εξάσκηση, σε λίγες βέβαια περιπτώσεις απαιτείται και μια κάποια " δεξιοτεχνία " για να μην πούμε ευστροφία.

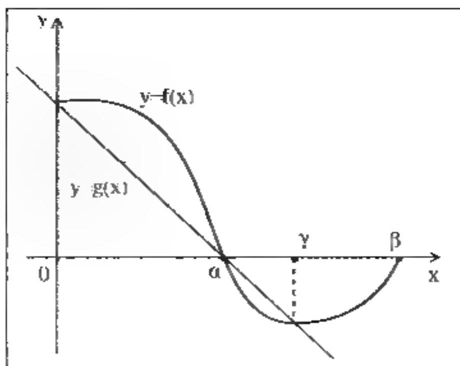
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

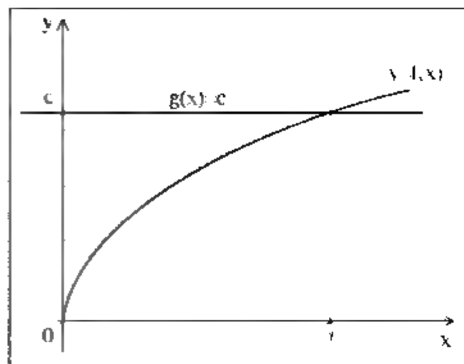
Εφαρμογή 1

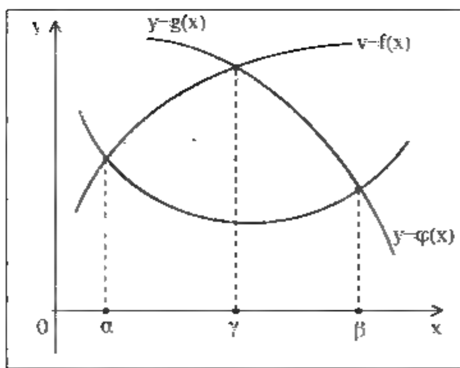
Να εκφραστεί το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μέρους των παρακάτω σχημάτων με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων.

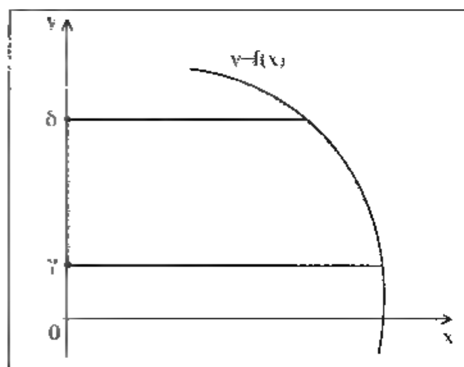












ΛΥΣΗ

i) $E = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) - g(x)\right) dx$

ii) $E = \int_{0}^{\alpha} f(x)\, dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\, dx + \int^{\beta} g(x)\, dx$

iii) $E = \int_{\alpha}^{\gamma} \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} g(x)\, dx - \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\, dx$

iv) $E = \int_{0}^{\alpha} \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_{0}^{\alpha} \left(c - f(x)\right) dx$

v) $E = \int_{\alpha}^{\gamma} \left(f(x) - \varphi(x)\right) dx + \int_{\gamma}^{\beta} \left(g(x) - \varphi(x)\right) dx$

vi) Λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x : Έχουμε $x = g(y)$.

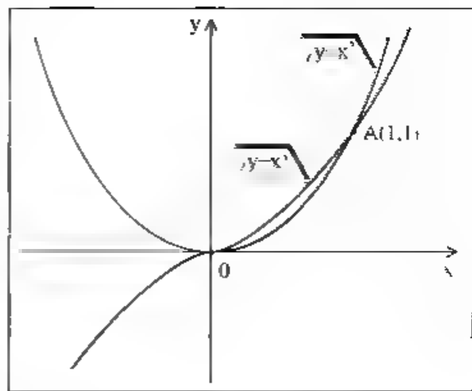
Είναι τότε $\int_{\gamma}^{\delta} g(y)\, dy$

Εφαρμογή 2

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^3$ και $y = x^2$.

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε τις τετμημένες των κοινών σημειων των δυο καμπύλων λύνοντας την εξισωση $x^3 = x^2$ η $x^2(x-1) = 0$, απο την οποία εχουμε $x = 0$ και $x = 1$. Άρα οι δυο καμπυλες τεμνονται στα σημεία O (0, 0) και A (1, 1)



Επειδή για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε $0 < x^3 < x^2$ ή $x^2 - x^3 < 0$. Το εμβαδόν της επιφάνειας που μας ενδιαφέρει ειναι επομένως:

$$E = \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ τ. μ.}$$

Εφαρμογή 3

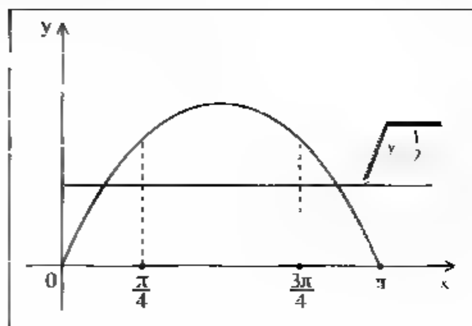
Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = ημx$ και τις ευθείες με εξισωσεις

$$y = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{\pi}{4} \quad και \quad x = \frac{3\pi}{4} .$$

ΛΥΣΗ

Οι συναρτήσεις f με $f(x) = ημx$ και g με $g(x) = \frac{1}{2}$ είναι συνεχείς στο ℝ .

Επισης $f(x) - g(x) = ημx - \frac{1}{2} \geq 0$ για καθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ άρα το ζητούμενο



εμβαδό είναι

$$E = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(ημx - \frac{1}{2}\right) dx = \left[-συνx - \frac{x}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \quad ή$$

$$E = \left(-συν\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{8}\right) - \left(-συν\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \text{ τ.μ.}$$

Εφαρμογή 4

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις παραβολές $c_1 : ψ^2 = 4x$ και $c_2 : x^2 = 4ψ$.

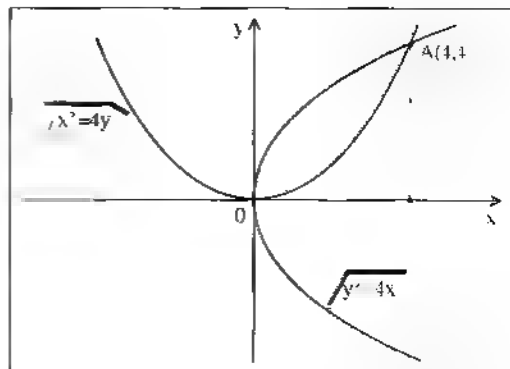
ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε τα κοινά σημεία των παραβολών c_1 και c_2. Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} ψ^2 = 4x \\ x^2 = 4ψ \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x = \frac{ψ^2}{4} \\ \frac{ψ^4}{16} = 4ψ \end{cases} \quad ή$$

$$\begin{cases} x = \frac{ψ^2}{4} \\ ψ^4 = 64ψ \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x = 0 \;\; ή \;\; x = 4 \\ ψ = 0 \;\; ή \;\; ψ = 4 \end{cases}$$

κοινά σημεία $O(0, 0)$, $A(4, 4)$.



Το ζητούμενο εμβαδό είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f με:

$f(x) = 2\sqrt{x}$ και g με $g(x) = \frac{x^2}{4}$, $x \geq 0$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 4$

Είναι όμως: $g(x) - f(x) = \frac{x^2}{4} - 2\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}\,(x\sqrt{x} - 8)}{4} < 0$ για κάθε x του διαστήματος $[0, 4]$. Άρα είναι:

$$E = \int_0^4 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = 2\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx - \frac{1}{4}\int_0^4 x^2\, dx =$$

$$2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{16}{3} \text{ τ.μ.}$$

Εφαρμογή 5

Να υπολογιστεί το εμβαδό του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 + 1$ και την ευθεία $x + y = 3$.

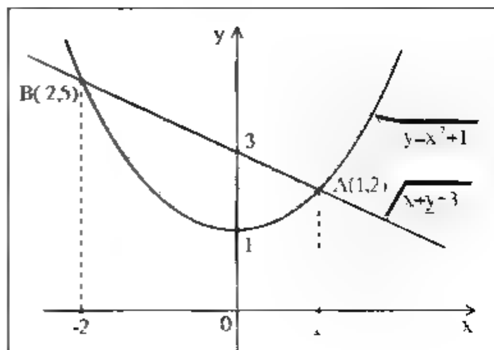
ΛΥΣΗ

Τα κοινά σημεία της παραβολής $y = x^2 + 1$ και της ευθείας $x + y = 3$ είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 3 - x \\ y = 3 - x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 3 - x \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} x_1 = -2,\ x_2 = 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$$



Άρα η ευθεία $x + y = 3$ και η καμπύλη $y = x^2 + 1$ τέμνονται στα σημεία A(1, 2) και B(-2, 5).

Αν θέσουμε $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = 3 - x$ τότε είναι $f(x) - g(x) = x^2 + x - 2 \leq 0$ στο διάστημα $[-2, 1]$ άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-2}^{1} [(3 - x) - (x^2 + 1)]\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2} \text{ τ.μ.}$$

Εφαρμογή 6

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^3$ και την ευθεία $y = x$.

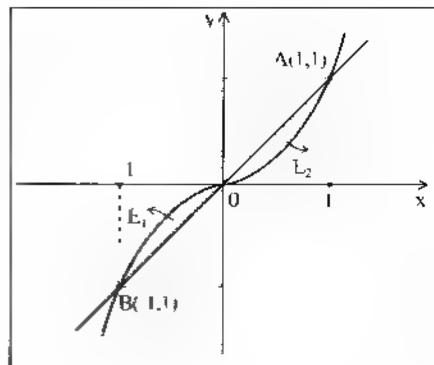
ΛΥΣΗ

Τα κοινά σημεία της καμπύλης και της ευθείας είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x^3 = x \\ y = x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x(x-1)(x+1) = 0 \\ y = x \end{cases}$$

άρα η καμπύλη και η ευθεία έχουν τρια κοινά σημεία B(- 1, - 1), O(0, 0), A(1, 1).

Για το πρόσημο της διαφορας $x^3 - x$ εχουμε τον πινακα.



x	-∞	-1	0	1	+∞
$x^3 - x$		+		+	

δηλαδή για κάθε $x \in [-1, 0]$ είναι $x^3 - x \geq 0$ και για καθε $x \in [0, 1]$ ειναι $x^3 - x \leq 0$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = E_1 + E_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Επειδη ειναι $E_1 = E_2$ λόγω συμμετρίας θα μπορούσαμε να υπολογισουμε το E ως εξής. $E = 2E_1 = 2\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx$

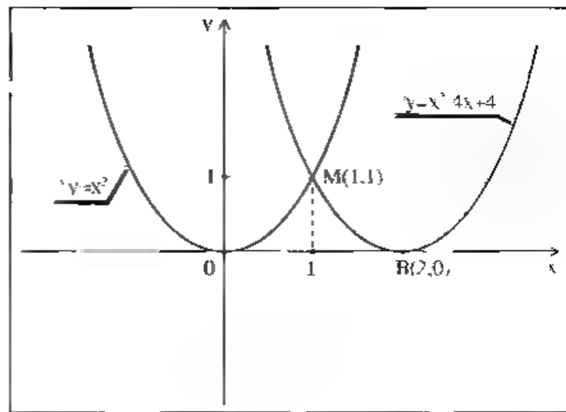
Εφαρμογή 7

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις καμπυλες $y = x^2$, $y = x^2 - 4x + 4$ και τον άξονα των x.

ΛΥΣΗ

Η καμπύλη $y = x^2$ έχει κοινο σημείο με τον άξονα των x το σημείο O(0, 0). Η καμπύλη $y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ έχει κοινο σημειο με τον άξονα των x το σημειο B(2, 0). Βρίσκουμε τα κοινα σημεια των δυο καμπυλων λύνοντας το σύστημα.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x^2 = x^2 - 4x + 4 \\ y = x^2 \end{cases}$$ από το οποίο παίρνουμε $x = 1$, $y = 1$



Επομένως οι δυο καμπύλες τέμνονται στο σημείο M(1, 1). Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν είναι·

$$E = E_1 + E_2 = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)\,dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ τ.μ.}$$

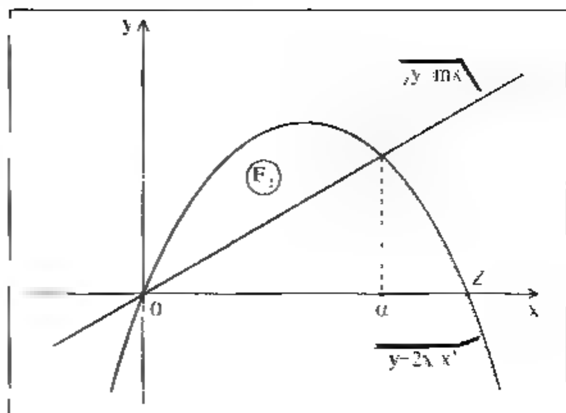
Εφαρμογή 8

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η οποία χωρίζει σε δυο ίσα μέρη το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζεται από την καμπύλη $y = 2x - x^2$ και τον άξονα Ox.

ΛΥΣΗ

Έστω $y = mx$ η ζητούμενη ευθεία.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της ευθείας και της καμπύλης είναι λύσεις της εξίσωσης $-x^2 + 2x = mx$ ή $x(x + m - 2) = 0$ ή $x = 0$, $x = 2 - m = \alpha$.



Αν ονομάσουμε E_1 το εμβαδόν που περικλείεται από την ευθεία $y = mx$ και την καμπύλη $y = 2x - x^2$ πρέπει $E_1 = 1/2\,E$ όπου E το εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των x.

Είναι $E \;\; \int_0^2 (2x \quad x^2)\,dx \; \cdot \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \quad 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

$E_1 = \int_0^{\alpha} \left[(2x \quad x^2) \quad mx\right] dx \quad \left[\, x^2 - \frac{x^3}{3} - m\,\frac{x^2}{2}\,\right]_0^{\alpha} \quad \frac{\alpha^3}{3} + \left(1 - \frac{m}{2}\right)\alpha^2$

Έχουμε $\;E_1 \;\; \frac{1}{2}\,E \;$ ή $\; -\frac{\alpha^3}{3} + \left(1 - \frac{m}{2}\right)\alpha^2 \quad \frac{2}{3}$ και για $m = 2 \quad \alpha$ έχουμε

$2\alpha^3 + 6\alpha^2 \quad 3(2 \quad \alpha)\,\alpha^2 \cdot 4 = 0$ ή $\alpha^3 \quad 4$ ή $\alpha = \sqrt[3]{4}$ και συνεπώς $y \;\cdot \left(2 - \sqrt[3]{4}\right) x$ ειναι η ζητούμενη ευθεία.

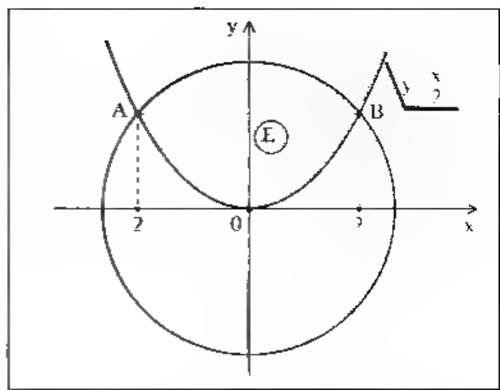
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Πρέπει η τετμημένη του σημείου τομης $(\alpha, m\alpha)$ των δυο γραμμών να ανήκει στο διαστημα (0, 2) που πράγματι συμβαίνει.

Εφαρμογή 9

Να βρεθεί το εμβαδόν των χωρίων στα οποία η παραβολη $y = \frac{x^2}{2}$ χωρίζει τον κύκλο $x^2 + y^2 = 8$.

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε τα κοινά σημεία του κυκλου και της παραβολής λύνοντας το σύστημα:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 \quad 2y \end{cases} \text{ ή}$$

$$\text{ή } \begin{cases} x^2 \quad 2y \\ y^2 + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε $y_1 = -4$ και $y_2 \quad 2$. Η τιμή $y_1 \quad -4$ απορριπτεται γιατί $x^2 \quad 2y$ και απο την τιμή $y \quad 2$ εχουμε $x = \pm 2$. Επομένως ο κυκλος και η παραβολή τέμνονται στα σημεία Α(2, 2) και Β(2, 2). Το ημικυκλιο που βρισκεται πάνω από τον άξονα των x εχει εξίσωση $y = \sqrt{8 - x^2}$.

Αν ονομάσουμε E_1 το εμβαδό που σχηματίζει η παραβολή $y = \frac{x^2}{2}$ με την καμπύλη $y = \sqrt{8 \quad x^2}$ τότε θα έχουμε

$$E_1 = \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = \int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx - \int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx - \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2} \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx$. Θέτουμε $x = \sqrt{8}$ συνθ, $\theta \in [0, \pi]$

Για $x = 2$ είναι συνθ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ άρα $\theta = \frac{\pi}{4}$ και για $x = -2$ είναι συνθ $= \frac{-1}{\sqrt{2}}$ άρα $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Είναι ακόμη $dx = -\sqrt{8}$ ημθ $d\theta$. Επομένως

$$\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\text{συν}^2\theta}\,\left(-\sqrt{8}\,\text{ημ}\theta\right)d\theta = -8\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\text{ημ}^2\theta\,d\theta =$$

$$= -8\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\text{συν}2\theta}{2}\,d\theta = -8\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\text{ημ}2\theta}{4}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

Επομένως από την (1) έχουμε:

$$E_1 = -8\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\text{ημ}2\theta}{4}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2} = 2\pi + \frac{4}{3} \text{ τ.μ..}$$

Το άλλο μέρος που χωρίζει η παραβολή τον κύκλο θα είναι $E_2 = E - E_1$ όπου $E = \pi R^2 = 8\pi$ το εμβαδόν του κύκλου, επομένως

$$E_2 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) \text{ ή } E_2 = 6\pi - \frac{4}{3} \text{ τ.μ.}$$

Εφαρμογή 10

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x + \frac{4}{(1+x)^2}$.

i) Υπολογίστε το εμβαδόν S(α) που ορίζεται από τη γραφική παράσταση (c) της f και από τις ευθείες με εξισώσεις $y = x$, $x = 1$, $x = \alpha$, $\alpha > 1$.

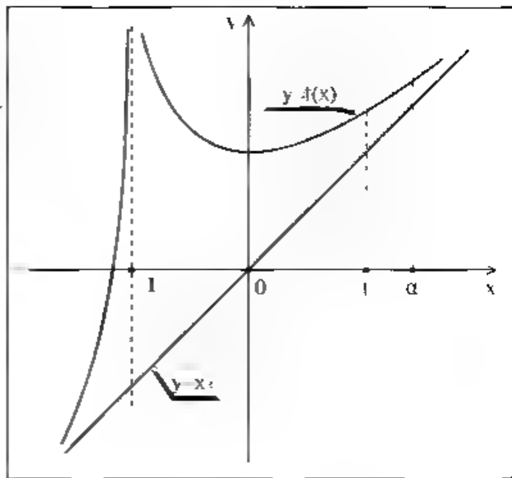
ii) Υπολογίστε το όριο: $\lim_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$

ΛΥΣΗ

$A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

i) Είναι $f(x) - y = x + \dfrac{4}{(1+x)^2} - x$,

$f(x) - y = \dfrac{4}{(1+x)^2} > 0$, για κάθε $x \in A$.



Άρα είναι:

$$S(\alpha) = \int_1^{\alpha} \left(x + \frac{4}{(1+x)^2} - x \right) dx \quad \text{ή}$$

$$S(\alpha) = \int_1^{\alpha} \frac{4}{(1+x)^2}\, dx$$

$$S(\alpha) = 4 \int_1^{\alpha} (x+1)^{-2}(x+1)'\, dx$$

$$= 4 \left[\frac{(x+1)^{-1}}{-1} \right]_1^{\alpha}$$

$$S(\alpha) = -4 \left(\frac{1}{(\alpha+1)} - \frac{1}{2} \right) = 2 - \frac{4}{1+\alpha} \ \text{τ.μ.}$$

ii) Είναι $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} S(\alpha) = 2 - \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \dfrac{4}{1+\alpha} = 2 - 0 = 2$ τ.μ.

Εφαρμογή 11

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $x + y - 2 = 0$ και $y^2 = x$.

ΛΥΣΗ

Τα κοινά σημεία των γραμμών με εξισώσεις $x + y - 2 = 0$ και $y^2 = x$ είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y^2 = x \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \\ y^2 = x \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = 1 \ \text{ή} \ y = -2 \\ x = 1 \ \text{ή} \ x = 4 \end{cases} \quad \text{άρα } A(4, -2),\ B(1, 1)$$

Η ευθεία $x + y - 2 = 0$ κόβει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(2, 0)$.
Η παραβολή (c) είναι η ένωση των γραφικών παραστάσεων c_1, c_2 των συναρτήσεων f_1 με $f_1(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ και f_2 με $f_2(x) = -\sqrt{x}$, $x < 0$
ενώ η ευθεία $x + y - 2 = 0$ ή $y = 2 - x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = 2 - x$, $x \in \mathbb{R}$. Το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $y = x - 2$ και $y^2 = x$ είναι τώρα:

$$E = \left|\int_0^1 f_1(x)\,dx\right| + \left|\int_1^2 g(x)\,dx\right| + \left|\int_0^4 f_2(x)\,dx\right| + \left|\int_2^4 g(x)\,dx\right|$$ γιατί $f_1(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$, $f_2(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,4]$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [2, 4]$ οπότε

- $\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}$

- $\int_1^2 g(x)\,dx = \int_1^2 (2-x)\,dx = \left[2x - \dfrac{x^2}{2}\right]_1^2 = (4-2) - \left(2 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

- $\int_0^4 f_2(x)\,dx = \int_0^4 -\sqrt{x}\,dx = -\left[\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = -\dfrac{16}{3}$

- $\int_2^4 g(x)\,dx = \int_2^4 (2-x)\,dx = \left[2x - \dfrac{x^2}{2}\right]_2^4 = -2.$

Άρα η (1) γράφεται: $E = \left|\dfrac{2}{3}\right| + \left|\dfrac{1}{2}\right| + \left|-\dfrac{16}{3}\right| - \left|-2\right| = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{16}{3} - 2 = 4\dfrac{1}{2}$

Άλλη λύση

Αν στρέψουμε το σχήμα παραβολής και ευθείας κατά $\frac{\pi}{2}$ τότε στη νέα θέση η παραβολή (c) έχει εξίσωση $y = x^2$ και η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y - x - 2 = 0$ ή $y = 2 + x$.

- Κοινά σημεία

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 + x \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y = 2 + x \\ x^2 = 2 + x \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} y = 2 + x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = -1 \text{ ή } x = 2 \\ y = 1 \text{ ή } y = 4 \end{cases}$$

άρα τα κοινά σημεία είναι $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$.

Γίναι όμως $x^2 - (2+x) = x^2 - x - 2 < 0$ για κάθε $x \in [-1, 2]$ άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\, dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Εφαρμογή 12

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^{-x}$, του άξονα των y και τις ευθείες $y = 2$, $y = 3$.

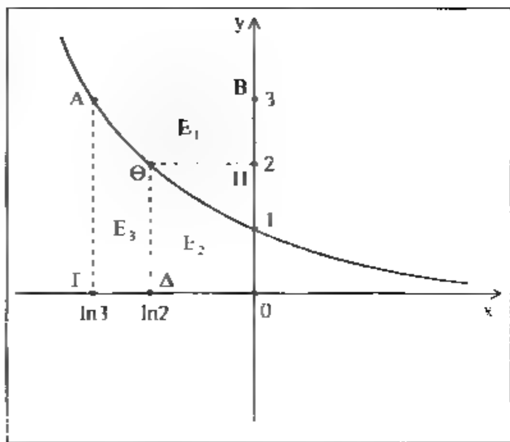
ΛΥΣΗ

Από την $y = e^{-x}$ έχουμε $-x = \ln y$ η $x = -\ln y$, $y > 0$. Επειδή το χωρίο είναι αριστερά του Oy έχουμε:

$$E = -\int_{2}^{3} x\, dx = -\int_{2}^{3} (-\ln y)\, dy =$$

$$\int_{2}^{3} \ln y\, dy = [y \ln y]_{2}^{3} - \int_{2}^{3} 1\, dy =$$

$$= [y \ln y]_{2}^{3} - [\, y\,]_{2}^{3} = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1 \text{ τ.μ.}$$



2ος τρόπος

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = e^{-x} \end{cases}$$

$$E = E_1 \;\; E_2 \;\; E_3 = \text{εμβ}(AB0\Gamma) \;\; \text{εμβ}(\Theta H 0 \Delta) \;\; \int_{\ln 3}^{-\ln 2} e^{-x}\, dx$$

Εφαρμογή 13

Να βρεθεί το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$, την εφαπτομένη αυτής στο σημείο με τετμημένη 0 και την ευθεία $x = \alpha$, $\alpha > 0$.

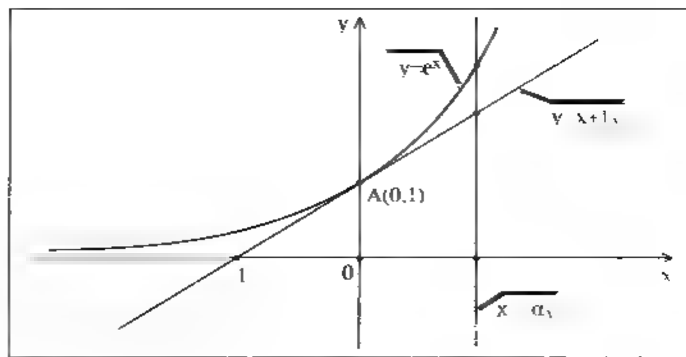
Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} E(\alpha)$.

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(x) = e^x$ και $f'(0) = 1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = 1 + x$.

ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΦΟΙΤΗΤΗΣ Μ.Π.Ι.



Είναι γνωστό ότι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως :

$$E(\alpha) = \int_0^{\alpha} [e^x - (x+1)]\, dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^{\alpha} =$$

$$= e^{\alpha} - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha - 1 = \frac{1}{2}\left(2e^{\alpha} - \alpha^2 - 2\alpha - 2\right)$$

Είναι : $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} E(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{e^{\alpha}}{2}\left(2 - \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 2}{e^{\alpha}}\right) = (+\infty)\cdot 2 = +\infty$

γιατί $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{e^{\alpha}}{2} = +\infty$ και

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 2}{e^{\alpha}} = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{2\alpha + 2}{e^{\alpha}} = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{2}{e^{\alpha}} = 0$$

Εφαρμογή 14

Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ και από τις εφαπτομένες αυτής στα σημεία A(0, - 3) και B(3, 0).

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(x) = -2x + 4$, $f'(0) = 4$ και $f'(3) = -2$ επομένως οι εξισώσεις στα σημεία A και B είναι αντιστοίχως $y = 4x - 3$ και $y = -2x + 6$.

Το σημείο τομής M των εφαπτομένων είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = -2x + 6 \end{cases} \quad \text{από το οποίο βρίσκουμε} \quad M\left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = E_1 + E_2$ όπου E_1 είναι το εμβαδό που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, την ευθεία $y = 4x - 3$ και από τις ευθείες $x = 0$ και $x = 3/2$. Ενώ το E_2 είναι το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f την ευθεία $y = -2x + 6$ και τις ευθείες $x = 3/2$ και $x = 3$.

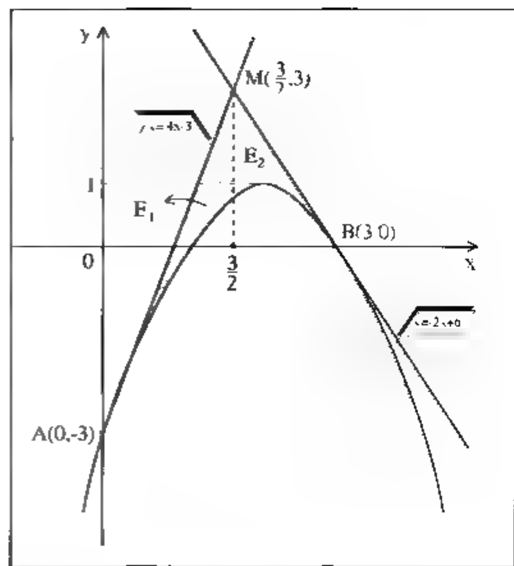
$$E_1 = \int_0^{\frac{3}{2}} \left[(4x - 3) - (-x^2 + 4x - 3)\right] dx =$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{8} \text{ τ.μ.}$$

$$E_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left[(-2x + 6) - (-x^2 + 4x - 3)\right] dx$$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{3} (x^2 - 6x + 9)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{9}{8}$$



Επομένως $E = E_1 + E_2 = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$ τ.μ.

Εφαρμογή 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2)$. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, να εξετάσετε αν είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τις ασύμπτωτους. Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x = 1$ και $y = 2$.

ΛΥΣΗ

Η f έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}^*$. Για $y = 0 \Leftrightarrow \ln x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ δηλαδή η γραφικής της παράσταση τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

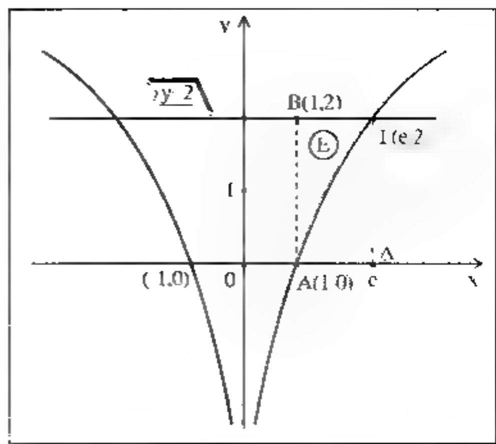
Είναι $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ και $f''(x) = -\frac{2}{x^2}$. Είναι ακόμη $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \ln x^2 = -\infty$ επομένως έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο την ευθεία $x = 0$.

Είναι $\lim_{x \to +\infty} \ln x^2 = +\infty$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτο (ούτε πλάγια γιατί $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ με L' Hospital)

Ώστε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Είναι $f(x) = \begin{cases} 2\ln x & \text{αν } x > 0 \\ 2\ln(-x) & \text{αν } x < 0 \end{cases}$. Το ζητούμενο χωρίο περικλείεται από την

την ευθεία $y = 2$ την ευθεία $x = 1$ και τον κλάδο της c_f με $x > 0$.



Η ευθεία $y = 2$ και η c_f με $x > 0$ τέμνονται στο σημείο Γ οι συντεταγμένες του οποίου είναι η λύση του συστήματος.

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = 2\ln x \end{cases}$$ από το οποίο έχουμε

$2\ln x = 2$ ή $\ln x = 1$ ή $x = e$
άρα $\Gamma(e, 2)$.

Το ζητούμενο εμβαδό θα είναι:

$$E = (AB\Gamma) = (AB\Gamma\Delta) - (A\Gamma\Delta) = 2(e-1) - \int_1^e 2\ln x\, dx = 2(e-1) - 2\int_1^e \ln x\, dx =$$

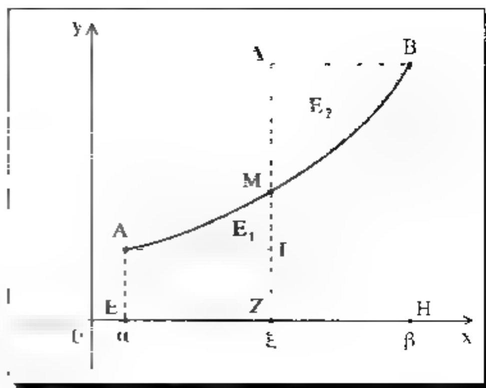
$$= 2(e-1) - 2\left[x\ln x - x\right]_1^e = 2e - 4 \text{ τ.μ.}$$

Εφαρμογή 16

Έστω καμπύλη $y = f(x)$ και οι ευθείες $x = \alpha$, $x = b$. Να βρεθεί ευθεία $x = \xi$ έτσι ώστε τα δυο καμπυλόγραμμα τρίγωνα (βλέπε σχήμα) να έχουν το ίδιο εμβαδό όταν i) $f(x) = k + \lambda + \mu x^2$ ii) $f(x) = \rho \cdot x^\nu$

ΛΥΣΗ

Το εμβαδό του καμπυλόγραμμου τριγώνου (ΑΜΓ) είναι :



$E_1 = \int_\alpha^\xi f(x)\, dx -$ εμβ. ορθ. (ΑΕΖΓ) ή

$E_1 = \int_\alpha^\xi f(x)\, dx - (\xi - \alpha) f(\alpha)$.

Ομοίως το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου (ΜΔΒ) είναι:

$E_2 =$ εμβ. ορθ. (ΖΗΒΔ) $- \int_\xi^\beta f(x)\, dx$.

Έχουμε:

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \int_\alpha^\xi f(x)\, dx - (\xi - \alpha) f(\alpha) = (\beta - \xi) f(\beta) - \int_\xi^\beta f(x)\, dx$$

$$\text{ή} \quad \xi = \frac{\alpha\, f(\alpha) - \beta\, f(\beta)}{f(\alpha) - f(\beta)} + \frac{1}{f(\alpha) - f(\beta)} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

Έχουμε τώρα (εύκολα) όταν :

i) $f(x) = k + \lambda x + \mu x^2$ τότε $\xi = \dfrac{\frac{1}{2}\lambda(\alpha+\beta) + \frac{2}{3}\mu(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\lambda + \mu(\alpha+\beta)}$

ii) $f(x) = \rho x^{\nu}$ τότε για $\nu \neq -1$ $\xi = \dfrac{\nu}{\nu+1} \cdot \dfrac{\alpha^{\nu+1} - \beta^{\nu+1}}{\alpha^{\nu} - \beta^{\nu}}$

όταν $\nu = -1$ τότε $\xi = \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \ln \dfrac{\beta}{\alpha}$.

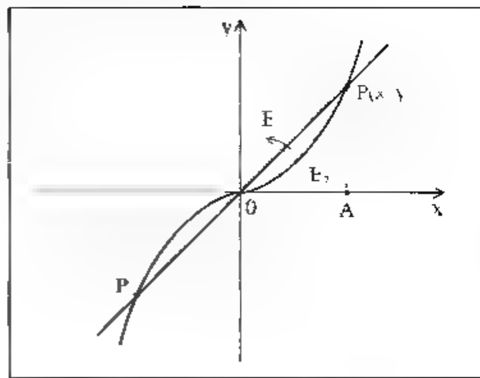
Σημειωση.

Να γίνει εφαρμογή οταν i) $f(x) = x^2 - 1$ ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Εφαρμογή 17

Έστω $P \neq O$ σημείο τομής της καμπύλης $y = x^3$, $x > 0$ και της ευθείας $y = \lambda x$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda > 0$ τα εμβαδά των επιφανειών που ορίζονται από την ευθεία και την καμπύλη και από την καμπύλη του άξονα των x και την παράλληλη ευθεία από το P προς τον άξονα των y είναι ίσα.

ΛΥΣΗ



Έστω $P(x_1, y_1)$ το σημείο τομής της $y = x^3$ και της ευθειας $y = \lambda x$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφικη παράσταση της f την ευθεία $x = x_1$ και τον άξονα των x είναι

$$E_2 = \int_0^{x_1} x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{x_1} =$$

$$= \frac{x_1^4}{4} = \frac{1}{4} x_1 \cdot x_1^3 = \frac{1}{4} x_1 \cdot y_1 \ \text{τ.μ.}$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΡ είναι: $(OAP) = \frac{1}{2} x_1 y_1$ τ.μ.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωριου που ορίζεται από την ευθεια και την καμπύλη $y = x^3$.

Είναι $E_1 = (OAP) - E_2 = \frac{1}{2}x_1 y_1 - \frac{1}{4}x_1 y_1 = \frac{1}{4}x_1 y_1$ τ.μ.

Επομένως $E_1 = E_2$

Εφαρμογή 18

Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$, $\lambda > 1$. Να υπολογιστεί κατόπιν το $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

ΛΥΣΗ

Η g ορίζεται στο $\mathbb{R}^*$ και η f για x>0. Βρίσκουμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο καμπύλων.

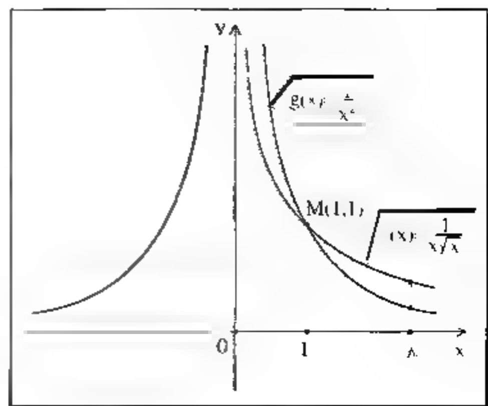
Έχουμε $f(x) = g(x)$ ή $\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2}$ ή

$x = \sqrt{x}$ ή $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$ ή $x = 1$.

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται στο σημείο M(1, 1).

Είναι $f(x) - g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

$= \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2} \geq 0$ για $x \geq 1$.



Επομένως

$$E(\lambda) = \int_1^{\lambda} (f(x) - g(x))\,dx = \int_1^{\lambda} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{-2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right]_1^{\lambda} = \frac{-2}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} + 1.$$

Είναι $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} + 1\right) = 1.$

Εφαρμογή 19

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ και $g(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

i) Υπολογίστε μια αρχική της $\left(1-\frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$ ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τη συνάρτηση f.

ii) Υπολογίστε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$, $0 < \lambda < 1$.

Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} E(\lambda)$

ΛΥΣΗ

i) Είναι $\int_1^x e^{\frac{1}{t}}\,dt = \int_1^x (t)' e^{\frac{1}{t}}\,dt = \left[t e^{\frac{1}{t}}\right]_1^x - \int_1^x t\cdot\left(e^{\frac{1}{t}}\right)' dt$ ή

$$\int_1^x e^{\frac{1}{t}}\,dt = \left[t e^{\frac{1}{t}}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{1}{t}}\,dt \quad ή$$

$$\int_1^x e^{\frac{1}{t}}\,dt - \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{1}{t}}\,dt = \left[t e^{\frac{1}{t}}\right]_1^x \quad ή$$

$$\int_1^x \left(1-\frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}}\,dt = \left[t e^{\frac{1}{t}}\right]_1^x$$

από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι μια αρχική της $\left(1-\frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι η συνάρτηση $x\,e^{\frac{1}{x}}$.

ii) Βρίσκουμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g.

Έχουμε $f(x) = g(x)$ ή $e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ ή $x = 1$

άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται στο σημείο M (1,1)

Είναι $f(x) - g(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$, για $0<x<1$ είναι $\frac{1}{x} > 1$ ή $1-\frac{1}{x} < 0$ άρα $f(x)-g(x)<0$ για $0<x<1$. Επομένως

$$E(\lambda) = \int_\lambda^1 (g(x) - f(x))\,dx = \int_\lambda^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}}\,dx = \left[-x e^{\frac{1}{x}}\right]_\lambda^1 = \lambda e^{\frac{1}{\lambda}} - e \text{ τ.μ.}$$

Εχουμε : $\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{\lambda}}}{\frac{1}{\lambda}} - e\right) = +\infty - e = +\infty$

αφου $\lim_{\lambda\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{\lambda}}}{\frac{1}{\lambda}} = \lim_{h\to+\infty} \dfrac{e^h}{h} = \lim_{h\to+\infty} \dfrac{(e^h)'}{(h)'} = \lim_{h\to+\infty} e^h = +\infty$

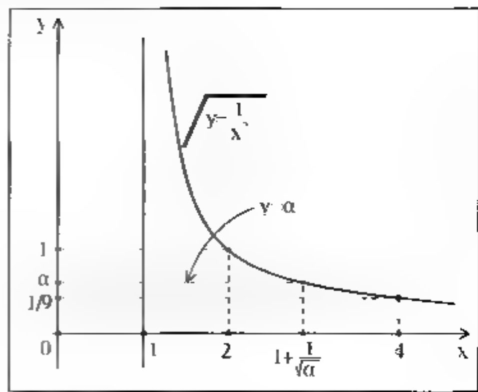
Εφαρμογή 20

i) Αν Α είναι το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ τις ευθείες $x = 2$, $x = 4$ και τον άξονα x΄x να προσδιορίσετε ευθεία $y = \alpha$ που να χωρίζει το Α σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
ii) Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) όταν $x = 2$, $x = t$ $t > 2$. Αποδείξτε ότι E(t) είναι γνησιως αυξουσα συνάρτηση στο $(2,+\infty)$ και βρείτε $\lim_{t\to+\infty} E(t)$

ΛΥΣΗ

i) Για α $x\in[2,4]$ είναι $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} > 0$ οπότε το εμβαδον του χωριου Α ειναι

$$E(A) = \int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \left[\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^4 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$



Η ευθεία $y = \alpha$ χωρίζει το χωρίο Α σε δύο ισεμβαδικά χωρία όταν

$$E_1 = \frac{E}{2} = \frac{1}{3}.$$

Διακρινουμε τις περιπτωσεις:

$f(4) < \alpha < f(2)$ ή $\frac{1}{9} < \alpha < 1$ έχουμε:

$\dfrac{1}{(x-1)^2} = \alpha$ ή $(x-1)^2 = \dfrac{1}{\alpha}$ ή

$x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Επομενως:

$$E_1 = \int_2^{1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} (f(x) - \alpha)\,dx = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_2^{1+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} - \alpha\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 2\right) = -\sqrt{\alpha} + 1 - \sqrt{\alpha} + \alpha$$

$$= \alpha - 2\sqrt{\alpha} + 1 = (\sqrt{\alpha} - 1)^2$$

Επομένως πρέπει: $(\sqrt{\alpha} \quad 1)^2 \quad \frac{1}{3}$ η $\sqrt{\alpha} - 1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ (αφού $\frac{1}{g} < \alpha < 1$)

Δηλαδή είναι $\alpha \quad \frac{2 \ (-\sqrt{3}\ )}{3}$

$0 < \alpha < f(4)$ ή $0 < \alpha < \frac{1}{9}$ εχουμε τότε $E_1 \quad E \int_2^4 \alpha dx$ ή

$\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 2\alpha$ ή $\alpha - \frac{1}{6}$ που είναι άτοπο γιατί $\alpha < \frac{1}{9}$.

ii) Ειναι $f(x) > 0$ για $x \in [2,t]$ οπότε :

$$E(t) \quad \int_2^t f(x)\, dx = \left[\ \frac{1}{x \quad 1} \right]_2^t = \ \frac{1}{t \quad 1} + 1$$

Εχουμε $E'(t) \quad \frac{1}{(+ - 1)^2} > 0$ άρα $E(t)$ γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

Ειναι $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t) \quad \lim\limits_{t \to +\infty} \left(\ \frac{1}{t - 1} + 1 \right) \quad 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλειεται από τον άξονα Ox και τις ευθειες $y \quad 3x$, $x \quad 1$, $x \quad 3$.

2. Να βρεθει το εμβαδό του τριγωνου που περικλείεται από τις ευθείες $y = 0$, $x \quad 4$ και $x + 2y \quad 8 \quad 0$.

3. Να βρεθει το εμβαδό του τριγωνου που περικλείεται από τις ευθείες $y = 5x$, $x = 2$ και τον άξονα Ox.

4. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλειεται από την καμπυλη $y = x^2 - 3x + 2$ και την ευθεια $y = 0$.

5. Δινεται η συνάρτηση f με $f(x) \quad (x \quad \alpha)(x \quad 3\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Να βρείτε το εμβαδο $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλειεται απο τη γραφική παρασταση της συνάρτησης f, τον άξονα x x και τις ευθειες με εξισωση $x \quad \alpha$ και $x \quad 3\alpha$.

6. Να βρεθεί το εμβαδο του χωριου που περικλειεται απο την καμπυλη $y = \ln(2x-1)$ και τις ευθειες $x = 2$ και $x \quad 5$

7. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρου που περικλειεται από τον άξονα των x και την καμπυλη στις περιπτώσεις.

i) $y = x^3 \quad 4x$
ii) $y = x(x-1)(x-2)$
iii) $y = $ συνx $x \in [0, \pi]$.

8. Να υπολογιστει το εμβαδο κυκλου ακτίνας R.

9. Να υπολογιστεί το εμβαδό της έλλειψης

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad 1.$$

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) \quad e^{x}$. Να υπολογιστεί το εμβαδον E του χωρίου που περικλειεται απο τη γραφικη παράσταση

ης f τον αξονα των x και τις ευθειες $x = 0$, $x = k\pi$ και να υπολογιστει το $\lim_{k \to +\infty} E$

11. Να υπολογιστει το εμβαδον του χωρου που περικλειεται απο την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, τις ευθειες $y = 1$, $y = 2$ και τον αξονα των y.

12. Να βρεθει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παρασταση της συναρτησης f του άξονα x΄x και τις ευθειες $x = \alpha$, $x = b$ όταν

i) $f(x) = \eta\mu x$, $\alpha = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$

ii) $f(x) = x\,\sigma\upsilon\nu x$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{3\pi}{2}$

13. Εστω η συνάρτηση $h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. Να βρεθει το εμβαδο που περικλειεται από τη γραφική παράσταση της h, τον αξονα Ox και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$

14. Να βρεθει το εμβαδο του χωρίου που περικλειεται απο την καμπύλη $y = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$, τον αξονα Ox και τις ευθειες $x = -\alpha$ και $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$.

15. Να βρεθεί το εμβαδό του χωριου που περιέχεται από τον αξονα Ox και την καμπύλη $y = \eta\mu^3 x\,\sigma\upsilon\nu x$, για $x \in [0, \pi]$.

16. Να βρεθει το εμβαδό του χωριου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτησης $h(x) = \frac{1}{|x + \sqrt{4 - x^2}|}$, τον αξονα x΄x και τις ευθειες $x = 0$ και $x = 2$

17. Να βρεθεί το εμβαδό του χωριου που περικλειεται απο τη γραφικη παράσταση της συναρτησης $f(x) = \frac{x + \lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda^2}}$, $\lambda > 0$ τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \lambda$.

18. Το εσωτερικό της ελλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ χωρίζεται από την υπερβολή $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ σε τρία τμήματα. Να βρεθουν τα εμβαδα αυτών των τμημάτων.

19. Υπολογίστε το εμβαδό E_λ του χωρίου που περικλειεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ του άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = \lambda$ $(-1 < \lambda < 0)$. Υπολογιστε κατοπιν το οριο $\lim_{\lambda \to -1^+} E_\lambda$.

20. Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται απο τη γραφικη παρασταση της συναρτησης f με $f(x) = \frac{1}{x}$, τον άξονα x΄x και τις ευθειες με εξισώσεις $x = 1$, $x = \lambda$, $\lambda > 0$.
ii) Να υπολογιστούν τα όρια

α) $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$ β) $\lim_{\lambda \to 0^+} E(\lambda)$.

21. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωριου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 1$ τον αξονα x΄x και την ευθεία $x = 3$.

22. i) Να υπολογιστεί το εμβαδο E_λ του χωρίου που περικλειεται απο τη γραφικη παρασταση της συνάρτησης f με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ τον άξονα των x και τις ευθειες με εξισώσεις $x = \frac{1}{e}$ και $x = \lambda$, $\lambda > 1$

ii) Υπολογίστε το οριο $\lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda$

23. α) Να αποδείξετε

$$\int e^{-x} \eta\mu x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

β) Αν S_k είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^{-x}\eta\mu x$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \pi$, $k \in N$ να βρειτε

i) το Sk ii) $\lim_{\nu \to +\infty} (S_1 + S_2 + ... + S_\nu)$

24. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο τη γραφική παρασταση της $f(x) = \eta\mu\,(\pi \ln x) + \sigma\upsilon\nu\,(\pi \ln x) - 1$ τον άξονα των $x'x$ και τις ευθείες $x = \sqrt{e}$ και $x = e^2$.

25. α) Να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = (1-x)e^{2x}$.
β) Να παραστήσετε γραφικα την καμπύλη
γ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη καμπύλη και τους αξονες.

26. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $h: R \to R$ με $h(x) = \sqrt{|x^2-1|} - x$ και να βρεθεί το εμβαδο του χωρίου που περικλειεται από τη γραφική παράσταση της h, τον άξονα Ox και τις ευθειες

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad x = \frac{1}{2}.$$

27. Η συναρτηση $f(x) = \frac{k\,x^2}{x-\lambda}$ έχει ελάχιστο για $x = 2$ και την ευθεία $y = 2x + 2$ πλάγια ασυμπτωτη.
α) Να υπολογισετε τα k και λ.
β) Αν $k = 2$ και $\lambda = 1$ να μελετήσετε και να παραστησετε γραφικά την καμπύλη
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του περικλειεται απο την καμπύλη, τον αξονα Ox και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$.

28. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3 + bx^2 + \gamma x$, $\alpha, b, \gamma \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$. Αν η συνάρτηση f έχει στο σημείο $x_1 = 1$ τοπικο ελάχιστο και στο σημειο $(2, f(2))$ είναι σημείο καμπής της c_f της f, τότε

i) Να βρεθουν τα b, γ συναρτήσει του α.
ii) Να βρεθεί το α, αν το εμβαδο του χωρίου που περικλειεται από τη γραφική παρασταση της f και του αξονα x΄x ειναι ίσο με 54 τ.μ.

29. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 + b\,x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$ $\alpha, b, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$ και ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ εχει δυο ρίζες πραγματικες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.
Αν m είναι το μεγιστο της f και Ε το εμβαδό του χωριου που περικλείεται απο τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x αποδείξτε οτι $E = \frac{2}{3}(\rho_1 - \rho_2)\,m$.

30. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{-2x}(1 + \eta\mu 3x).$$

i) Να βρεθεί το εμβαδό E(t) του χωριου που περικλείεται από τη γραφικη παράσταση της συνάρτησης f, τον αξονα x΄x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = t$ $(t > 0)$.
ii) Να υπολογίσετε το $\lim_{t \to +\infty} E(t)$

31. Να βρεθει το εμβαδό του χωριου που περικλείεται απο τις καμπύλες:

$$y = \frac{1}{3 + x^2} \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{54}(x^2 + 6).$$

32. Να βρεθει το εμβαδο του χωριου που περικλείεται από τις καμπυλες :

$$y = -x^2 + 4x + 1 \quad \text{και} \quad xy = 4$$

33. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες :

$$y = -3x^2 + 6x - 2, \quad y = 2x^2 - 2x + 1.$$

34. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλειεται από τη παραβολή: $y^2 - 9x$ και την ευθεια $y = 3x$.

35. Να βρεθει το εμβαδό του χωριου που περικλείεται από την παραβολη $y^2 - 2(x \quad 4)$ και την ευθεία $x \quad 3y \quad 0$.

36. Να βρεθεί το εμβαδό του χωριου που περικλειεται από τις καμπύλες :

$$y = \frac{4 \quad x^2}{x^2} \quad \text{και} \quad x^2 = \frac{1}{2}(y \quad 1)$$

και τον άξονα Ox.

37. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλειεται από τις καμπύλες :

$$y \quad x(x-2) \quad \text{και} \quad y \quad \frac{x^2}{3}.$$

38. Να βρεθεί το εμβαδό τυ χωρίου που βρισκεται στο πρωτο τεταρτημόριο και περικλειεται από τις παραβολές $y^2 - 2\rho x$ και $x^2 - 2\rho y$

39. Να βρεθεί το εμβαδό του χωριου που περικλείεται από τις καμπύλες :

$$y = \frac{(x \quad 1)^3}{16} \quad \text{και } y = \frac{(x-1)^2}{2} \quad (x \quad 1).$$

40. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου περικλειεται από τις καμπύλες

$y = \frac{1}{2}(x^2 \quad 1)$ και τις ευθείες $y \quad x$ και $y - 0$.

41. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται απο την καμπύλη $y - x^2 - 3x$ και την ευθεία $3x + y \quad 4 \quad 0$.

42. Να βρεθει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις καμπυλες $y^2 - 4x$, $x^2 - 4y$ και την ευθεία $y \quad 2$.

43. Να προσδιοριστεί η ευθεια που διέρχεται από την αρχή των αξονων και χωριζει το χωριο που περικλείεται απο την καμπυλη $y = 2x - x^2$ και τον άξονα Ox, σε δυο ισοεμβαδικά χωρία.

44. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτησεων

$$h(x) - \frac{e^x + e^{x}}{2} \quad \text{και} \quad g(x) - \frac{e^x \quad e^{x}}{2}$$

και τις ευθείες $x \quad 0$ και $x - \lambda$.

Να βρείτε το όριο : $\lim_{\lambda \to \infty} E(\lambda)$.

45. Να υπολογίσετε το εμβαδόν μεταξυ της υπερβολής $x^2 \quad y^2 \quad 7$ και της παραβολής $y^2 = \frac{9}{4}x$

46. Να βρεθεί το εμβαδόν των τμηματων στα οποία χωρίζει τον κύκλο $x^2 + y^2 \quad 4px$ η παραβολή $y^2 \quad 2px$.

47. Έστω η υπερβολή $x^2 \quad y^2 \quad \alpha^2$ και η ευθεία $y - kx$, $0 < k < 1$. Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωριου που περικλειεται απο την υπερβολη, την ευθεία $y \quad kx$ και τον άξονα των x.

48. Έστω οι παραβολες $x^2 - 2py$, $y^2 - 2qx$ $\rho > 0$, $q > 0$. Να αποδείξετε οτι το εμβαδόν που ορίζεται από τον αξονα Oy και την παραβολη $y^2 - 2qx$ είναι ίσο με το εμβαδο που ορίζεται απο την πρωτη παραβολή και ισο με το εμβαδόν που ορίζουν οι δυο παραβολές.

49. Να βρεθει το εμβαδό του χωριου που περικλείεται απο την καμπύλη $y -$ ημx + συνx, τον άξονα Ox και τις ευθειες που είναι παραλληλες προς τον Oy και διέρχονται από τα σημεία στα οποια η καμπυλη παρουσιάζει ελαχιστο και μέγιστο για $x \in [0, 2\pi]$.

50. i) Να υπολογιστει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$h(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{και} \quad g(x) = x, \text{ όταν } x \in [2, 4].$$

ii) Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2 - e^{-x^2})\,dx \geq 1$

51. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^{2\nu-1}}{\sqrt{1-x^{2\nu}}}$.

i) Να υπολογίσετε τις κατακόρυφες ασύμπτωτους της c_f. Έστω $x = \lambda$ η ασύμπτωτη με $\lambda > 0$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδον Ε του χωρίου που περικλείεται απο τη γραφική παράσταση της f τους δυο άξονες και την ευθεία $x = t$, $0 < t < \lambda$. Να υπολογίσετε κατόπιν το $\lim_{t \to \lambda} E$.

52. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση με $h(x) = \sqrt{x^2 + 2|x|}$ και να βρεθεί το εμβαδό που περικλειεται της h, τον αξονα Οx και τις ευθειες $x = 0$ και $x = 1$.

53. Εστω η συναρτηση $h : R \to R$ με $h(x) = 2|x| - x^2$.

i) Να παρασταθεί γραφικά η h.

ii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλειεται από τη γραφική παράσταση της h, τον άξονα Οx και τις ευθείες $x = 1$ και $x = -1$

54. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συναρτησης f με $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ και τις ευθειες $x = 0$, $y = 1$, $x = \lambda$, $\lambda > 0$.

ii) Να υπολογιστει το $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

55. Να βρεθει το εμβαδο Ε(λ) του χωρίου που περικλειεται από τη γραφική παρα σταση της συνάρτησης f με $f(x) = (x-1)\,e^{x+1}$ και τις ευθείες με εξισωσεις $x = 1$, $x = \lambda$, $\lambda < 1$, $y = 0$.

Να υπολογιστεί κατόπιν το $\lim_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)$.

56. Να βρεθει το εμβαδο Ε(λ) του χωριου που περικλείεται από τη γραφικη παρασταση της συναρτησης f με $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x}$ και τις ευθείες $y = 2x - 3$, $x = 1$, $x = \lambda$, $\lambda > 1$
Να βρεθεί κατόπιν το $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

57. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

i) Να εξεταστεί αν η f ειναι συνεχης στο $x_0 = 0$.

ii) Να βρεθεί η εξισωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημειο Α(1, f(1)) αυτής

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(λ) του χωριου που περικλείεται απο τη γραφικη παρασταση της f και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$, $0 < \lambda < 1$ και τον άξονα x΄x.

Να βρεθει $\lim_{\lambda \to 0^+} E(\lambda)$.

58. Δίνεται η συναρτηση f με $f(x) = \alpha^x$, $x \in R$, $\alpha > 1$.

i) Να βρείετε την εξίσωση της εφαπτομε νης (ε) της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο της με τετμημένη x_0.

ii) Να βρείτε για ποιές τιμές του x_0 η (ε) τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο με θετική τετμημενη.

iii) Αν η (ε) τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο με θετική τετμημένη να βρειτε συναρτήσει των α, x_0 το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται απο την γραφικη παράσταση της f, την ευθεια (ε) και τους αξονες x΄x και y΄y.

Αποδείξτε ακόμη ότι $E > \frac{e-2}{2(\alpha-1)}$

59. Δίνονται οι συναρτησεις f με

$f(x) = \frac{1 + x^2}{e^{\frac{1}{x}}}$ και $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x\,e^{\frac{1}{x}}}$

Να υπολογισετε το εμβαδό Ε(λ) του χω

ριου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες με εξισώσεις x = 1, x = λ, λ > 1.

Να βρείτε κατόπιν το $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$.

60. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x) = ημ2x, x∈ [0, π/2]. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις εφαπτόμενες αυτής στα σημεία A(0, 0) και B(π/2, 0).

61. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x$, $\varphi(x) = 6 - x$ και τον άξονα των x΄x.

62. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu^2(\pi x), & 0 \le x \le 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

i) Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα των x και τις ευθείες x = 1 και x = e.

63. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$.

Να υπολογιστεί το εμβαδόν E(m) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f την πλάγια ασύμπτωτο αυτής και τις ευθείες x = 1, x = m, m > 1.

Να υπολογιστεί το $\lim_{m \to +\infty} E(m)$.

64. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^3 \ln x, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

i) Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν E(α) του χωρίου που περικλείεται από την εφαπτομένη από την γραφική παράσταση της f την εφαπτομένη της c_f στο $x_o = 0$ και τις ευθείες x = e και x = α, 0 < α < e.

iii) Να βρεθεί το α όταν $E(\alpha) = \alpha^4 \ln \alpha$.

Να βρεθεί το $\lim_{\alpha \to 0^+} E(\alpha)$.

65. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x \ln x, & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

i) Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$.

ii) Να βρεθούν τα ακρότατα αυτής.

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα των x και τις ευθείες x = 1/e, x = s όπου $\frac{1}{e} < s < 1$.

66. Έστω f με $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$, x > 0

i) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1, x = 2.

67. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^\alpha$, x > 0, 0 < α < 1.

i) Να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο (0, +∞)

ii) Έστω (ε) η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης (c) της f στο σημείο (x_o, y_o) αυτής, όπου $x_o > 0$.

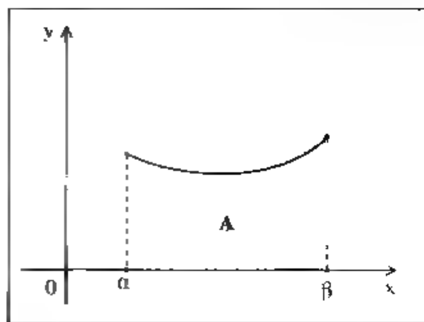
Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την (c), την εφαπτόμενη της (ε) και τον y΄y να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)} x_o y_o \text{ τμ.}$$

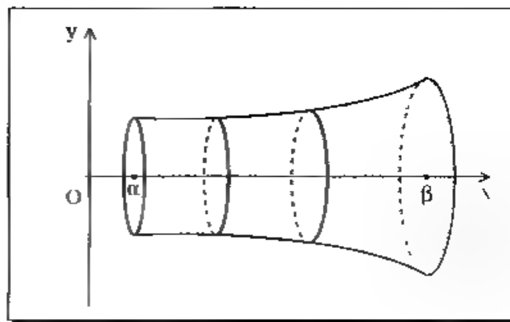
Όγκος στερεού από περιστροφή - Έργο δύναμης

Δινεται μια συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] (σχημα 1).

Η γραφική παρασταση της f οι ευθείες x = α, x = β και ο άξονας των x ορίζουν ενα χωρίο Α. Θεωρούμε ότι το χωρίο Α περιστρέφεται γύρω από τον άξονα x΄x οποτε διαγραφει ένα στερεό. Ο ογκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή αυτή δινεται από τον τύπο



$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi (f(x))^2 \, dx = \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) \, dx$$



Έργο δύναμης

Αν υποθέσουμε ότι ενα υλικό σημειο κινείται πανω σε μία ευθεία την οποια ταυτιζουμε με τον άξονα x΄x, υπό την επιδραση μιας δυναμης **F** με διεύθυνση τη διευθυνση του x΄x και μέτρο που εξαρτάται μόνο από τη θεση x του σημείου δηλαδή το μέτρο της F ειναι συνεχής συνάρτηση του x τότε:

Το παραγόμενο έργο W όταν το υλικό σημείο κινείται πάνω στον άξονα x΄x απο το σημειο x = α στο σημείο x = β υπό την επίδραση μόνο της δύναμης F δινεται απο τον τύπο

$$W = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

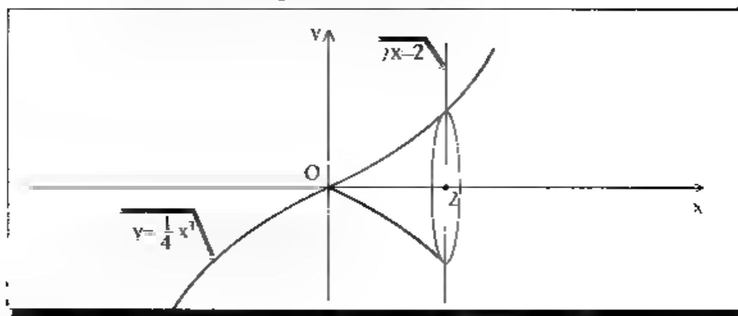
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα x΄x, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{1}{4}x^3$, του άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$, $x = 2$.

ΛΥΣΗ

Ο ζητούμενος όγκος δίνεται από τον τύπο

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)\,dx \quad ή$$

$$V = \pi \int_0^2 \frac{1}{16} x^6\,dx = \frac{\pi}{16} \cdot \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^2 = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{128}{7} = \frac{8\pi}{7} \quad κ.μ.$$



Εφαρμογή 2

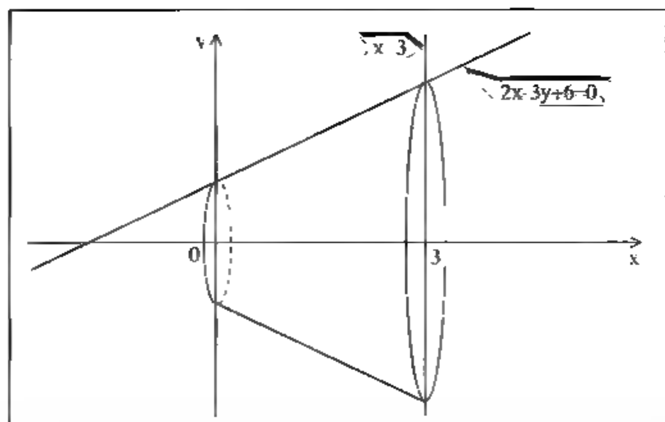
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα x΄x, του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $2x - 3y + 6 = 0$, $x = 3$ και τους άξονες x΄x και y΄y.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $2x - 3y + 6 = 0$ ή $y = \frac{2x+6}{3}$.

Άρα ο ζητούμενος όγκος είναι:

$$V = \pi \int_0^3 \left(\frac{2x+6}{3} \right)^2 dx = \frac{\pi}{9} \int_0^3 (4x^2 + 24x + 36)\,dx = 28\pi \quad κ.μ.$$



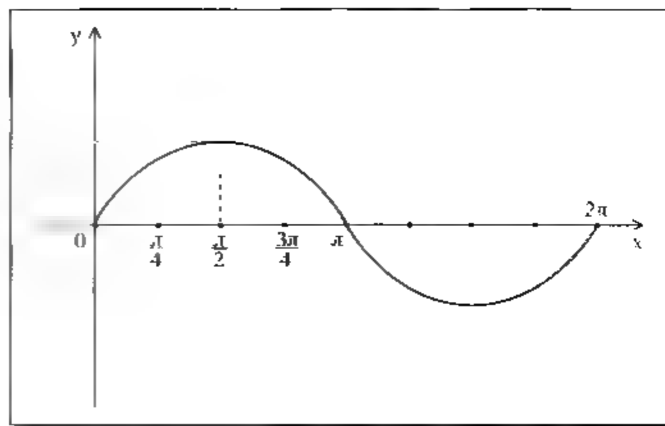
Εφαρμογή 3

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω απο τον άξονα x΄x, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη y = ημx και του άξονα x΄x, αν x ∈ [0, 2π]

ΛΥΣΗ

Το στερεό που προκυπτει εχει όγκο που δινεται απο τον τύπο

$$V = \int_0^{2\pi} \pi f^2(x)\,dx$$



Εχουμε: $V = \pi\int_0^{2\pi} \eta\mu^2 x\,dx = \pi\int_0^{2\pi} \frac{(1-\sigma\upsilon\nu 2x)}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\eta\mu 2x}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}\,2\pi = \pi^2$ κ.μ.

Εφαρμογή 4

Ένα υλικο σημείο κινείται πάνω στον άξονα 0x με την επίδραση της δύναμης F=3x- 5. Να υπολογιστεί το παραγόμενο έργο μεταξύ δύο θέσεων, όπου F=1 και F= 25.

ΛΥΣΗ

Όταν F 1 είναι x 2 και όταν F = 25 είναι x ~ 10

Άρα:

$$W \quad \int_{2}^{10} (3x \quad 5)\, dx \quad 104 \text{ σε κατάλληλες μονάδες}$$

Εφαρμογή 5

Ένα ελαστικό νήμα μήκους l_0 έχει το άκρο του Α σταθερό ενώ στο Β ασκειται μία δύναμη ανάλογη με την επιμήκυνση.

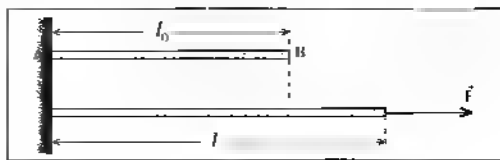
Τι εργο μηχανικό θα πρέπει να δαπανήσουμε ώστε το μήκος του νήματος να επιμηκηνουμε κατά ΔL=l- l_0. Το μηχανικό έργο δίνεται από τον τύπο:

$$W = \int_{0}^{\Delta L} k\, x dx$$ **όπου x επιμήκυνση του ελαστικού νήματος.**

ΛΥΣΗ

Οταν το νήμα επιμηκυνεται κατά x τότε η δυναμη είναι F kx οπότε το δαπανουμενο μηχανικο εργο για συνολική επιμήκυνση ΔL l - l_0 είναι·

$$W \quad \int_{0}^{\Delta L} kxdx \quad \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{\Delta L} \quad \frac{1}{2}k\Delta L^2 \quad \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$



Εφαρμογή 6

Η συσπείρωση ενός ελατηρίου είναι ανάλογη με την εφαρμοζόμενη δυναμη. Να βρεθει το μηχανικό έργο για να συσπερωθεί το ελατήριο κατά 3 cm όταν ειναι γνωστό ότι για να το συσπειρώσουμε κατά 0,5 cm απαιτείται δύναμη 1 kgr.

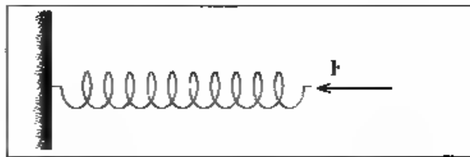
ΛΥΣΗ

Αν x ειναι η συσπειρωση του ελατηριου τότε η δύναμη συμπίεσης είναι F κx (1)

Για F =1 kgr, x ~ 0,5 m έχουμε από την (1) k 2.

Αρα το ζητούμενο μηχανικο έργο είναι:

$$L = \int_{0}^{3} 2xdx \quad [x^2]_0^3 = 9 \text{ kgr cm.}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεου που προκυπτει από την περιστροφή, γυρω απο τον άξονα x΄x, του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $y=2x$ και $x=3$ και τους άξονες 0x και 0y.

2. Δίνεται η καμπυλη $y^2=x^3$. Να βρεθεί ο ογκος του στερεου που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα x΄x του χωρίου που περικλείεται από την καμπυλη, του άξονα x΄x και την ευθεία $x=\alpha$. Να βρεθεί ο ογκος του στερεου που προκυπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα y΄y, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, του άξονα y΄y και την ευθεία $y=\sqrt{\alpha^3}$. Για ποια τιμή του α οι δυο όγκοι είναι ίσοι;

3. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκυπτει από την περιστροφή γυρω από τον αξονα x΄x, του χωρίου που περικλειεται από την καμπυλη $y^2=9x$ και την ευθεια $y=3x$

4. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει απο την περιστροφη γυρω από τον αξονα x΄x, χωριου που περικλείεται από τις παραβολές $y=2x-x^2$, $y=9-x^2$, ($y>0$) και τον αξονα 0x.

5. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γυρω από τον αξονα x΄x, του χωρίου που περικλειεται από την καμπυλη $y=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}}+e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$ και τις ευθειες $x=0$ και $x=b$.

6. Να βρεθει ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή, γύρω απο τον άξονα x΄x, του χωριου που περικλειεται από την καμπύλη

$y=\left(\alpha^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ και τους άξονες 0x και 0y.

7. Να βρεθεί ο όγκος του στερεου που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα x΄x, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη

$x^2+(y-b)^2-\rho^2=0$ ($b<\rho$).

8. Δίνονται η ισοσκελής υπερβολή. $x^2-y^2-7=0$ και η παραβολή $y^2=2/4\,x$.

i) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου Α που περικλέιεται από τις παραπανω καμπύλες.

ii) Να βρεθει ο όγκος του στερεου που προκύπτει από την περιστροφή γύρω απο τον άξονα x΄x του χωρίου Α.

9. Το χωρίο που περικλειεται από την καμπύλη $y=x^2+1$, την ευθεία $y=2$ και τον άξονα των y στρέφεται πλήρη στροφη περι τον άξονα των y. Να βρειτε τον όγκο του στερεού.

10. Να βρεθεί ο ογκος του στερεού που παράγεται αν το επίπεδο χωρίο που περικλείεται μεταξυ των $\psi^2=6x$ και $y=x$ στραφεί πλήρη στροφη γυρω από τον άξονα 0x.

11. α) Δινεται η καμπυλη $y=5-x^2$. Αν $0<\alpha<\sqrt{5}$ η ευθεια $x=\alpha$ συναντά τον αξονα 0x στο Τ και την καμπύλη στο Ρ (0 η αρχή των αξόνων). Η από το Ρ παράλληλη προς τον 0x συναντα τον 0y στο Σ. Το ορθογώνιο ΟΤΡΣ περιστρεφεται πλήρη στροφή γυρω απο τον άξονα 0x και παραγει κύλινδρο, όγκου V.
Να προσδιορίσετε το α έτσι ωστε ο όγκος V να ειναι μέγιστος.

β) Η ευθεία $y=4$ τέμνει την καμπυλη $y=5-x^2$ στα Α και Β. Να βρειτε τον όγκο του στερεου που παράγεται από την πληρη περιστροφή της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη και την ευθεια ΑΒ όταν:

ι) άξονας περιστροφής είναι ο 0x
ιι) άξονας περιστροφης είναι η ευθεια.

12. α) Να μελετήσετε και να παραστησετε γραφικά την συναρτηση $f(x)e^{x^2}$.
β) Να βρειτε τον όγκο V, που γραφεται από την επιφάνεια που περικλειεται απο την καμπύλη $y=e^{x^2}$ τους άξονες των x και y και την ευθεία $x=k$ ($k>0$) οταν αυτή κάνει μια πλήρ... στροφή γυρω από τον αξονα των y

13. Να βρεθει το δαπανωμενο μηχανικό έργο για την ανέλκυση ενός σωματος 12 kgr από τον πυθμενα ενός φρεατίου βαθους 20 m, γνωρίζοντας οτι το βάρος του συρματόσχοινου ειναι 0,6 kgr/m.

14. Να μελετηθει και να παρασταθει γραφικά η συναρτηση $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

β) Να υπολογιστεί το εμβαδον της επιφάνειας που ορίζεται απο την καμπυλη και την ευθεία $y=1/2$.

γ) Να υπολογιστεί ο ογκος που παράγει η επιφάνεια (β) όταν στραφεί κατα γωνια π περί τον άξονα των y.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ορισμός 1 Ονομάζουμε διαφορική εξισωση, καθε εξισωση που περιεχει μια αγνωστη συνάρτηση, καποιες από τις παραγώγους της και την ανεξάρτητη μεταβλητή.

Ορισμός 2 Ονομάζουμε τάξη της διαφορικής εξίσωσης τη μεγαλυτερη από τις τάξεις των παραγώγων που εμφανίζονται στην εξισωση.

Το προβλημα που θα μας απασχολήσει είναι ο προσδιορισμός όλων των συναρτήσεων $y=f(x)$, οι οποίες ικανοποιούν μια διαφορική εξίσωση. Κάθε συναρτηση $y=f(x)$ που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση ονομαζεται **λύση της διαφορικής εξισωσης.**

Θα λέμε ότι η οικογένεια των συναρτήσεων (1): $y=f(x, c)$, όπου c διατρέχει ενα υποσύνολο K του R, είναι η **γενική λύση** μιας διαφορικης εξισωσης (2): $y'=\varphi(x, y)$, όταν για κάθε $c\in K$, η (1) είναι λύση της διαφορικής εξισωσης (2).

Η λυση που παίρνουμε για κάθε συγκεκριμένη τιμή της c ονομαζεται μερική λυση της διαφορικής εξίσωσης.

● *Διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών*

Ορισμός 3 Οταν μια διαφορική εξισωση μπορεί να γραφεί με τη μορφη $g(y)\cdot y'=f(x)$, τοτε λέμε ότι έχουμε μια διαφορικη εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών από το γεγονος ότι μπορουμε να χωρισουμε τα y΄ και y από το x.

● *Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $g(y)\cdot y' = f(x)$*

1. Προσδιορίζουμε μια αρχική C(y) της g(y) και μια αρχική F(x) της f(x), οπότε η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$C'(y)\cdot y' = F'(x) \quad ή \quad [C(y(x))]' = [F(x)]'$$

2. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι:

$$C(y)=F(x)+c \quad (*)$$

3. Λύνουμε την (*) ως προς y και παίρνουμε την y ως συνάρτηση της x και της σταθεράς c, δηλαδή τη γενική λύση.

Παρατήρηση

Πολλές φορές η διαφορική εξίσωση $g(y)\cdot dy/dx = f(x)$ γράφεται με τη συμβλική μορφή $g(y)\cdot dy=f(x)\,dx$, από την οποία προήλθε η γραφή της ισότητας (*) με τη μορφή $\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c$,

όπου τα αόριστα ολοκληρώματα αντιπροσωπεύουν μια αρχική και όχι το σύνολο των αρχικών

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $x^2dy + y\,dx = 0$, $x > 0$ και να βρεθεί η μερική λύση για την οποία ισχύει $y(1) = 2$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση για κάθε $x > 0$ και $y \neq 0$ γράφεται:

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{dx}{x^2}, \quad οπότε \quad \int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{dx}{x^2}dx + c_1.$$

$$ή \quad \ln|y| = \frac{1}{x} + c_1 \quad ή \quad \ln|y| = \ln e^{\frac{1}{x}} + \ln e^{c_1} \quad ή \quad \ln|y| = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}e^{c_1}\right)$$

$$ή \quad |y| = e^{\frac{1}{x}}e^{c_1} \quad ή \quad y = \pm e^{\frac{1}{x}}e^{c_1} \quad ή \quad y = c\cdot e^{\frac{1}{x}} \quad όπου \quad c = \pm e^{c_1}.$$

Ακόμη είναι φανερό ότι η συνάρτηση $y = 0$ αποτελεί ακόμη μια λύση της εξίσωσης οπότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από την $y = c\cdot e^{\frac{1}{x}}$ με $c \in \mathbb{R}$

Επειδή $y(1) = 2$, από την γενική λυση παίρνουμε $2 = c\cdot 2e^{1}$, οπότε η ζητούμενη μερική λύση είναι η $y = 2e^{-1}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ ή $y = 2e^{\frac{1-x}{x}}$, $x > 0$

Εφαρμογή 2

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y^2}{(1 + x^2)\, xy}$, $x > 1$

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x > 1$ και $y \neq 0$ έχουμε : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y^2}{(1 + x^2)\, xy}$ ή $\dfrac{1}{1 + y^2}\, dy = \dfrac{1}{x(1 + x^2)}\, dx$

οπότε $\displaystyle\int \frac{y}{1 + y^2}\, dy \quad \int\left(\frac{1}{x} \quad \frac{x}{1 + x^2}\right) dx + c_1$ ή $\dfrac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \ln x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + c_1$

ή $\ln(1 + x^2) + \ln(1 + y^2) = 2\ln x + 2c_1$ ή $\ln(1 + x^2)(1 + y^2) = \ln c_2 x^2$ ($c_2 = e^{2c_1} > 0$).

ή $(1 + x^2)(1 + y^2) = c_2 x^2$ ή $1 + y^2 = \dfrac{c_2 x^2}{1 + x^2}$ ή $y^2 \quad \dfrac{(c_2 - 1)x^2 - 1}{1 + x^2}$

ή $y = \pm\sqrt{\dfrac{cx^2 \quad 1}{x^2 + 1}}$ (όπου $c = c_2 \quad 1 > \quad 1$)

οπου $c \in (- 1 , + \infty)$ τέτοια ώστε για κάθε $x \geq 1$ να ισχύει $cx^2 \quad 1 > 0$ (αφού $y \neq 0$) δηλαδή τελικά $c \in (1, + \infty)$

Εφαρμογή 3

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $(1 + y)\, dx - (1 - x)\, dy = 0 \quad x > 1$

ΛΥΣΗ

Για καθε $x > 1$ και $y \neq \cdot 1$ έχουμε:

$(1 + y)\, dx - (1 - x)\, dy \quad 0$ ή $\dfrac{dy}{1 + y} - \dfrac{dx}{1 - x}$, οπότε

$\displaystyle\int \frac{dy}{1 + y} = - \int \frac{dx}{x \quad 1} + c_1$ ή $\ln|1 + y| \quad - \ln(x - 1) + c_1$

ή $\ln|1 + y| + \ln(x \quad 1) \quad \ln c_2$ ($c_2 = e^{c_1} > 0$)

ή $\ln |1 + y|(x - 1) = \ln c_2$ η

$|1 + y|(x \quad 1) \quad c_2$ ή $|1 + y| \quad \dfrac{c_2}{x \quad 1}$ ή $1 + y = \pm\dfrac{c_2}{x \quad 1}$ η $y \quad \dfrac{c}{x - 1} - 1$

οπου $c \in \mathbb{R}^*$ ($c \quad \pm c_2$). Ακόμη είναι φανερό ότι η συνάρτηση $y \quad 1$ αποτελεί ακομη μια λύση της εξίσωσης. Επομένως οι λυσεις της εξίσωσης δίνονται απο την

$y \quad \dfrac{c}{x - 1} - 1$, $x > 1$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τη συνάρτηση f που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο A(2,1) και η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της $M(x,y)$, $x \neq \pm\sqrt{6}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης: y^2x.

2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f σε κάθε σημείο της A(x, y) έχει συντελεστή διεύθυνσης που ισούται με το λόγο των συντεταγμένω του A. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο (1, 1).

3. Να λυθούν οι διαφορικές εξισωσεις:

i) $\dfrac{dy}{dx} = e^{y}$

ii) $\dfrac{dy}{dx} - y^2 + 1$

iii) $y' + e^x y - 0$

iv) $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy - 0$

v) $(x \quad y^2x)\,dy + (y - x^2y)\,dy - 0$

vi) $dx + x\,\text{εφ}x\,dy - 0$

vii) $\alpha\left(x\cdot \dfrac{dy}{dx} + 2y\right) - xy\cdot \dfrac{dy}{dx}$

4. Να δείξετε ότι αν $xy - \ln y - 1$, τότε $y^2 + (xy - 1)\,y' - 0$

5. Να δείξετε ότι αν $x^2 + y^2 \quad 2\alpha x - 0$, τοτε $y^2 \quad x^2 - 2xyy' - 0$.

Ποιες από τις παρακατω προτασεις είναι αληθεις (Α) και ποιες ειναι ψευδεις (Ψ). Δικαιολογηστε την απάντησή σας.

1. Η αρχικη συναρτηση μιας συνάρτησης ειναι συνεχης.

2. h, g ολοκληρώσιμες τότε h+g και h- g ολοκληρώσιμες.

3. Αν f συνεχης στο [0,1], f(x) > 0 για κάθε x∈[0,1] και $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx$ τότε:

α) $I < \frac{1}{2}$ β) $I = \frac{1}{2}$ γ) $I > \frac{1}{2}$

4. h+g ολοκληρωσιμη τότε h, g ολοκληρωσιμες.

5. h, g ολοκληρώσιμες τότε h- g- ολοκληρωσιμη.

6. $\int (h+g)\,dx \quad \int h\,dx + \int g\,dx$

7. $\int (h-g)\,dx \quad \int h\,dx - \int g\,dx$

8. h ολοκληρωσιμη τοτε |h| ολοκληρωσιμη

9. |h| ολοκληρώσιμη τότε h ολοκληρώσιμη

10. $h(x) = 0$ στο $[\alpha, b]$ τότε $\int_\alpha^b h(x)\,dx = 0$

11. $\int_\alpha^b h(x)\,dx \quad 0$ τότε $h = 0$ στο $[\alpha, b]$

12. $\int_\alpha^b h^2(x)\,dx \quad 0$ τότε $h = 0$ στο $[\alpha, b]$

13. Αν α>b και f συνεχής στο [α,b] f(x)≥0 τοτε $\int_\alpha^b f(x)\,dx \geq 0$

14. F,G αρχικες συναρτησεις της h τότε F- G σταθερό στο Ε, [πεδίο ορισμου της h].

15. F, G αρχικές συναρτήσεις της h στο [α,b] τοτε F- G σταθερα στο [α, b]

16. h ολοκληρωσιμη στο [α, β] τότε η h εχει αρχικές συναρτησεις στο [α, b].

17. Έστω h συνεχής συνάρτηση του [α,b] και υπαρχει $x_0 \in (\alpha, b)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) \neq 0$, τότε υπαρχει μια περιοχή V του x_0, τέτοια ώστε για κάθε $x \neq x_0$, $x \in V$ ειναι

$$\int_{x_0}^{x} h(t)\,dt \neq 0$$

18. Αν η h είναι συνεχής στο IR και

$$\int_\alpha^\beta h(x)\,dx \neq 0, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α ≠ β, τότε η h(x) δεν αλλάζει πρόσημο στο IR.

19. h έχει αρχικές συναρτήσεις στο [α, b] τοτε h- συνεχης στο [α, b]

20. h συνεχης στο [α, b] τοτε η h εχει αρχικές συναρτήσεις στο [α,b].

21. $\left|\int_\alpha^b h(x)\,g(x)\,dx\right| < \max\limits_{\alpha<x<b}\left(|h(x)|\right)\left|\int_\alpha^b g(x)\,dx\right|$

22. h συνεχής στο IR και περιττή τοτε για κάθε λ ∈ IR είναι: $\int_{-\lambda}^{\lambda} h(t)\,dt =$ σταθερό

23. Αν f συνεχής στο IR με την ιδιοτητα οτι $H(x+y) \quad F(x) + f(y)$ για καθε x,y ∈ IR και για κάθε αρχικη F της f. Τότε η f είναι

α) μηδενική β) f(x) - x

γ) σταθερή όχι μηδέν δ) ένα προς ενα

24. Η h είναι συνεχής στο [α, b] τότε υπάρχει ξ ∈ [α, b], τέτοιο, ωστε

$$\int_\alpha^b h(x)\,dx \quad h(\xi)(b-\alpha)$$

25. Έστω f με $f(x) - \int_{x}^{x+1} ημy^3 dy$, $x > 0$ τότε

α) υπάρχει $x > 0$ με $f(x) \geq \frac{6x+5}{3x^2}$

β) $f(x) < \frac{6x+5}{3x^2}$ για κάθε $x > 0$

γ) υπάρχει $x > 0$ με $f(x) = \frac{6x+5}{3x^2}$

26. Αν $h(x) < g(x)$ στο $[α, b]$ και συνεχεις

τότε $\int_{α}^{b} h(x)\,dx < \int_{α}^{b} g(x)dx$

27 $\int_{α}^{b} h(x)dx < \int_{α}^{b} g(x)\,dx$

$f(x)$, $g(x)$ συνεχείς στο $[α,b]$ τότε

$h(x) < g(x)$ στο $[α, b]$

28

$\int_{0}^{1} x^2 ημ^2 x\,dx > \int_{0}^{1} x\,ημ^2 x\,dx$

29 Αν f συνεχής στο $[0, 1]$ και

$2\int_{0}^{1} h(x)\,dx - 1,$

τοτε υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ωστε $h(x_0) - x_0$

30. $g(x) > 0$ τοτε $\int_{α}^{b} h(x)\cdot g(x)dx <$

$\max_{α \leq x < b} \{h(x)\} \cdot \int_{α}^{b} g(x)dx$

31. $g(x) > 0$ τότε $\int_{α}^{b} |h(x)\cdot g(x)|\,dx \leq$

$\max_{α < x < b} \{|h(x)|\} \int_{α}^{b} g(x)\,dx$

32. $h(x) \geq 0$, h συνεχης στο $[α, b]$ και

$\int_{α}^{b} h(x)\,dx - 0$ τοτε $h(x) = 0$ στο $[α, β]$.

33. Αν $f(x) - g(x)$ στο $[α, b]$ και συνεχείς

τότε $\int_{α}^{b} f(x)\,dx = \int_{α}^{b} g(x)\,dx$

34. $\int_{α}^{b} f(x)dx \quad \int_{α}^{b} g(x)dx$ τότε

$h(x) - g(x)$ στο $[α, b]$.

35. $\int_{α}^{x} f(x)\,dx - \int_{α}^{x} g(x)\,dx$, για κάθε

$x \in [α, b]$ τότε $f(x) = g(x)$ στο $[α, b]$

(όπου f, g συνεχεις στο $[α,b]$)

36. Η $h(x) \geq 0$ στο $[α, b]$ τοτε $\int_{α}^{b} h(x)\,dx \geq 0$

37. $\int_{α}^{b} h(x)\,dx \geq 0$ τότε $h(x) > 0$ στο $[α, b]$

38. i) έστω I ένα διάστημα του R που περιέχει το 0. Αν οι h, g είναι συνεχεις στο I και για κάθε $x \in I$ ισχύει

$\int_{0}^{x} h(t)\,dt \quad \int_{0}^{x} g(t)\,dt$

τότε $h(x) - g(x)$;

39. ii) Αν οι h, g ειναι συνεχείς στο I και για κάθε $x \in I$ ισχυει

$\int_{0}^{x} h(t)\,dt - \int_{0}^{x} g(t)\,dt$

τότε για κάθε $x \in I$ ισχυει $h(x) = g(x)$;

40. Έστω f συνεχής στο $[0, 1]$ με

$3\int_{0}^{1} f(x)\,dt - 1$ τότε

α) $f(x) - x^3$ για κάθε $x \in [0,1]$

β) $f(x) \neq x$ για καθε $x \in [0,1]$

γ) υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ με $f(x_0) - x_0^3$

δ) $f(x) \neq x^3$ για καθε $x \in (0,1)$ και $f(1)$ - .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Εστω f συνεχής στο [α,b] με

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}$$

Αποδείξτε οτι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \eta\mu(\pi\xi)$

2. Εστω f συνεχης συνάρτηση στο [0,π] με την ιδιότητα $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$

Αποδειξτε ότι υπαρχει $\xi \in [0,\pi]$ τέτοιο ωστε $f(\xi) = \eta\mu\xi$.

3. Να βρεθουνοι τιμές του x για τις οποίες ισχυει

$$\int_0^x \eta\mu^4 t\,dt = \frac{3}{8}x$$

4. Εστω f συνεχής συνάρτηση στο [α, b] και g ειναι μια παράγουσα της f η οποία μηδενίζεται στο $x_0 \in [\alpha, b]$. Να αποδείξετε οτι η g εχει τη μορφή

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \text{ για κάθε } x \in [\alpha, b]$$

5. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις, f ορισμένες στο [0,1] με την ιδιότητα

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f^2(x^2)\,dx$$

6. Εστω το συνολο των συναρτήσεων F με $f \in F$ όταν: f συνεχής στο [0, 1] με $0 \le f(x) \le 2$ και $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

i) Τι τιμές μπορεί να πάρει το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x f(x)\,dx$

ii) Αν f, f^2 ανήκουν F τότε f σταθερη.

7. Να αποδείξετε ότι

$$I = \int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu^{2m}x\,\eta\mu^{2\nu+1}x\,dx = 0 \text{ για κάθε } m,\nu \in N$$

8. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{10\pi}^{11\pi} \frac{\eta\mu x}{x}\,dx < \int_{8\pi}^{9\pi} \frac{\eta\mu x}{x}\,dx$$

9. Εστω η συνάρτηση F με $F(x) = \int_0^{x^4} \frac{dt}{1+t^4}$

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

10. Έστω η συνάρτηση F με

$F(x) = \int_{\eta\mu x}^{\sigma\upsilon\nu x} \sqrt{1+t^2}\,dt$. Για ποιές τιμές του x η F γίνεται μέγιστη;

11. Αν για καθε $x \in [0,+\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχυει $\frac{1}{x} \cdot F(x) < F'(x)$

12. Έστω f μια συναρτηση συνεχής στο [α,b] τέτοια ώστε

$$0 < f(x) < \int_\alpha^x f(t)\,dt \text{ για κάθε } x \in [\alpha,b].$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\int_\alpha^b [f(t)]^\nu\,dt \le \left[\int_\alpha^b f(t)\,dt\right]^\nu \text{ για κάθε } \nu \in N$$

14. i) Να δείξετε ότι υπαρχει το

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx$$

ii) Να δείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί α, b τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in R$, $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ ισχύει:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\alpha\,\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \frac{b\,\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$$

iii) Να βρείτε τις αρχικές συναρτησεις της συνάρτησης $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ στα διαστήματα που δεν περιέχουν σημεία $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

iv) Να υπολογιστεί το I.

15. Εστω οι συναρτήσεις h, g : με $h(x) = \sigma\upsilon\nu(\ln x)$ και $g(x) = \eta\mu(\ln x)$, $x > 0$.

i) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία οι h και g έχουν αρχικές συναρτήσεις.

ii) Εστω F μια αρχική της h και G μια αρχική της g, με $F(1) = 0$ και $G(1) = 0$. Να βρεθεί μια σχέση μεταξύ των G και F. Να βρεθούν οι F και G.

iii) Να βρεθούν οι αρχικές συναρτήσεις των h και g

16. Να βρεθούν οι αρχικές συναρτήσεις της συναρτήσεις , με

$$h(x) = x \quad 2 + \sqrt{x^2 \quad 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}, \; x \in \mathbb{R}$$

17. Εστω η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{e^x}, & \alpha\nu\ x \in (-\infty, 1) \\ \dfrac{\ln^2 x}{x}, & \alpha\nu\ x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Να δειξετε ότι η h έχει αρχικες συναρτησεις και να βρειτε μια από αυτές.

18. Έστω τα ολοκληρώματα :

$$I_1(x) = \int^x t\,\sigma\upsilon\nu(\ln t)\,dt \quad \kappa\alpha\iota$$

$$J_1(x) = \int_1^x t\,\eta\mu(\ln t)\,dt$$

i) Να γράψετε το $I_1(x)$ ως συνάρτηση του $J_1(x)$ και το $J_1(x)$ ως συνάρτηση του $I_1(x)$.

ii) Να υπολογίσετε τα $I_1(x)$ και $J_1(x)$.

iii) Να βρεθούν τα $I_1\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ και $J_1\left(e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

19. Αν f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με

$$0 \le \int_0^x f(t)dt \le \int_0^x (x - t)f(t)dt$$

για καθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

20. i) Να βρεθει το σύνολο Ε των πραγματικων α που πληρουν τη σχεση: $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x'$

ii) Αν το α είναι το μικροτερο μη αρνητικό στοιχείο του Ε και το b είναι το μικρότερο μη αρνητικό στοιχειο του Ε \ {α}, να βρείτε τους α, b.

iii) Να βρεθεί το εμβαδο του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστασεις των συναρτησεων ημx και συνx και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = b$.

21. Ένα σημείο Μ διαγραφει ένα τεταρτοκυκλιο ΑΒ, κέντρου Ο και ακτινας R. Έστω Η η προβολή του Μ στην ΟΑ. Υπολογίστε τη μέση τιμή του MH^2 στην καθε μια από τις κάτω περιπτώσεις:

i) Το Μ είναι σημείο του τόξου ΑΒ και οι ευθειες ΟΜ και ΟΑ σχηματίζουν γωνία $\theta \in (0, \pi/2]$

ii) Το Μ ειναι σημείο του τοξου ΑΒ τέτοιο ωστε $OH = x$.

22. Στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xOy θεωρούμε μια καμπύλη (c) , που αποτελείται από τα σημεία που οι συντεταγμένες τους πληρούν τη σχέση $y^m = \alpha\, x^\nu$, όπου $\alpha > 0$ και $m, \nu \in \mathbb{N}^*$. Έστω Μ ενα σημειο της (c) με τετμημένη λ και τα Η και Κ οι προβολές αυτου στους Οx και Οy αντιστοιχως. Αν το S είναι το εμβαδο του ορθογωνίου ΟΗΜΚ και το Σ είναι το εμβαδο του χωρίου που περικλειεται από τη καμπυλη (c) και απο τα τμήματα ΟΗ και ΗΜ, να δειξετε οτι:

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{m}{m+\nu}$$

23. Εστω συνάρτηση f με πεδιο ορισμου $\Pi(f) = [0, +\infty)$ και συνεχης σ' αυτό με $f(0) = 0$. i) Θεωρουμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \; x \ge 0.$$ Εξηγείστε γιατί η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και υπολογίστε το $F'(0)$.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt, & x > 0. \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

α) Αποδείξτε οτι η G ειναι συνεχης στο 0
β) Αποδείξτε οτι η G ειναι παραγωγισιμη στο (0, +∞) και βρειτε τη G΄(x).

24. Έστω $k_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^v x\, dx,\ v \in N$

i) Να αποδείξετε ότι το K_v υπάρχει για καθε $v \in N$

ii) Να υπολογίσετε τα k_0 και k_1.

iii) Να εκφρασετε το $K_v + k_{v+2}$ ως συνάρτηση του v

iv) Να μελετήσετε τη μεταβολή της ακολουθίας (K_v)

v) Να δειξετε ότι η ακολουθία (k_v) είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της.

25. Να βρεθει το όριο της ακολουθίας (u_v) με γενικό όρο:

$$u_v = \frac{1}{v}\left(1 + συν^2\frac{\pi}{v} + συν^2\frac{2\pi}{v} + \dots + συν^2\frac{v\pi}{v}\right)$$

26. Εστω $α, b \in R$, $α < b$ και $I_v = \int_α^b x^v dx$,

$J_v = \frac{b-α}{6}\left[α^v + b^v + 4\left(\frac{α+b}{2}\right)^v\right]$, οπου $v \in N$

i) Να συγκρίνετε τα I_v και J_v όταν $v = 0, 1, 2$.

ii) Να δείξετε ότι για κάθε πολυωνυμική συναρτηση h βαθμού ≤ 2 ισχυει:

$$\int_α^b h(x)\,dx = \frac{b-α}{6}\left[h(α) + h(β) + 4h\left(\frac{α+b}{2}\right)\right],$$

όπου $v \in N$

(τυπος των τριών επιπέδων)

Εφαρμογη:

Εστω η παραβολη : $y = (b-x)(x-α)$. Να βρεθεί το εμβαδό του χωριου που περικλείεται από τη καμπυλη y, τον αξονα x΄x και τις ευθειες $x = α$ και $x = b$.

iii) Να αποδείξετε ότι ο τύπος των τριων επιπεδων εφαρμόζεται για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμου.

iv) Να συγκριθουν τα I_4 και J_4, οταν $(α, b) = (0, 1)$. Τι συμπέρασμα βγάζετε;

27. Έστω η συναρτηση F με

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ x \in (-1, 1)$$

i) Αποδειξτε ότι η F ειναι περιττή

ii) Αποδείξτε ότι η F ειναι συνεχης και αύξουσα στο [0,1)

iii) Αποδείξτε ότι για $t \in [0,1)$ ισχυει

$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ και ότι το οριο $\lim\limits_{x \to 1} F(x)$ είναι πεπερασμένο.

iv) Θεωρούμε τη συνάρτηση $φ(x) = ημx$

$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και τη συνάρτηση F, $x \in [0, 1)$.

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση Foφ και να αποδειχθεί ότι η $(Foφ)(x) = x$ είναι σταθερη στο $[0, \pi/2)$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} F(φ(x))$ και να συμπερανετε το οριο $\lim\limits_{x \to 1} F(x)$

v) Να γίνει γραφικη παρασταση της F οταν $x \in [0, 1)$.

vi) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομενης της c_F στο σημείο $x_0 = 0$

28. Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο [α,b] με τρίτη παραγωγο συνεχή στο [α,b]. Αν $f(α) = f(b) = 0$ και $f΄(b) = 0$ αποδείξτε οτι

$$\int_α^b f'''(x) f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[f'(α)\right]^2$$

29. i) Έστω $α, b \in R$ με $α < b$ και $αb > 0$. Να βρεθουν οι μέσες τιμές m_1 και m_2 των συναρτήσεων $h(x) = x^2$ και $h^{-1}(x)$ στο [α, b]. Να δειξετε οτι $m_1 m_2 > 1$.

ii) Αν $α, b \in R$, $α < b$ και h μια συνεχής συναρτηση στο [α, b] με $h(x) > 0$ για καθε $x \in [α, b]$ και m_1, m_2 ειναι οι μέσες τιμές των h και h^{-1} στο [α, b], να δείξετε οτι $m_1 m_2 > 1$ (να χρησιμοποιησετε την ανισοτητα του Schwartz).

30. Έστω η συνάρτηση

h : με $h(x) = x^3 + x^2$.

i) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η h

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h και την ευθεία y = 2x.

31. i) Εστω η συνάρτηση h: με $h(x) = \frac{x}{4-x^2}$.

ii) Να παρασταθεί γραφικά η h.

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h, του άξονα Ox και τις ευθείες x = 0 και x = 1

32. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℝ με f(x)≠0 για καθε x≠0.

Αν $\frac{f''(x-\alpha)}{f(x-\alpha)} = \frac{f''(x+\alpha)}{f(x+\alpha)}$ να υπολογιστει το

$$\begin{vmatrix} f(-\alpha) & f(\alpha) \\ f'(-\alpha) & f'(\alpha) \end{vmatrix} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{f(x-\alpha)f(x+\alpha)}$$

33. Έστω η συναρτηση f αύξουσα και παραγωγίσιμη στο διαστημα I ⊆ ℝ. Να αποδείξετε οτι: $\gamma \int_x^y f(t)\,dt \le \int_{\gamma x + (1-\gamma) y}^{y} f(t)\,dt$

για κάθε x,y ∈ I και για κάθε γ∈[0,1].

34. Εστω $I_0 = \int_1^e x\,dx$ και $I_\nu = \int_1^e x(\ln x)^\nu\,dx$

ν∈N* Να αποδείξετε οτι

α) $2I_\nu + \nu I_{\nu-1} = e^2$ για καθε ν∈N*.

β) Η I_ν είναι φθινουσα και ότι

$\frac{e^2}{\nu+3} < I_\nu < \frac{e^2}{\nu+2}$ και υπολογιστε

$\lim_{\nu\to+\infty} I_\nu$, $\lim_{\nu\to+\infty} \nu I_\nu$

35. $f(x) = \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$

i) Να παρασταθει γραφικα η f.

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :

$$\int_9^{1} f(x)\,dx.$$

36. i) Να παρασταθει γραφικα η συναρτηση $f(x) = x\ln x$.

ii) Να βρεθει το εμβαδό του χωριου που περικλείεται από τη γραφικη παρασταση της f, τον άξονα Ox και τις ευθειες x = 1/e και x = 2.

37. Εστω η συναρτηση h : με $h(x) = x^2 \ln x$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονια η h.

ii) Να παρασταθει γραφικά η h

iii) Να βρεθει το εμβαδο του χωριου που περικλειεται απο τη γραφική παρασταση της h, τον άξονα x΄x και τις ευθειες x = 1 και x = e.

38. Εστω συνάρτηση με $f(x) = x - e\ln x$

i) Να παρασταθει γραφικα η f.

ii) Απο τη μονοτονία της f να διαπιστωσετε την ανισότητα: $\pi^e < e^\pi$.

iii) Να βρεθει το εμβαδό του χωριου που περικλείεται απο τη γραφικη παρασταση της f, τον αξονα Ox και τις ευθειες x = 1 και x = e.

39. Έστω η συναρτηση h: με

$$h(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}},\ x > 0$$

i) Να μελετηθεί και να παρασταθει γραφικα η h.

ii) Να βρεθει το εμβαδό του χωριου που περικλειεται από τη γραφική παρασταση της h, τον άξονα x΄x και τις ευθειες x = 1 και x = 2.

40. Εστω η συναρτηση

f : με $f(x) = x - x\ln x$

i) Να μελετηθεί και να παρασταθει γραφικα η f

ii) Να βρεθούν οι εξισωσεις των εφαπτομενων στην γραφικη παρασταση της f στα σημεια με τετμημενες : 1/e, e, e^2.

iii) Να βρεθει μια αρχικη συναρτηση της f.

iv) Να βρεθεί το εμβαδό του χωριου που περικλειεται απο τη γραφική παρασταση της f, τον αξονα Ox και τις ευθειες x = 1/e και x = e.

41. Έστω η συνάρτηση f, με

$$f(x) = \frac{x^{2\nu-1}}{\sqrt{1-x^{2\nu}}} \quad \text{με} \quad \nu \geq 1$$

και πεδίο ορισμού $A = (-1, 1)$.

i) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f.

ii) Να βρεθεί το εμβαδό E(t) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, του άξονα Ox και την ευθεία $x = t$, $t < 1$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xOy.

iii) Να βρείτε το $\lim\limits_{t \to 1} E(t)$.

42. Έστω η συνάρτηση f, με

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}, \quad x > -1$$

i) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f.

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες Ox και Oy και την ευθεία $x = t$, $-1 < t < 0$.

Να βρεθεί το $\lim\limits_{t \to -1} E(t)$.

43. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = x + \frac{1}{2x^2}, \quad x \neq 0$$

i) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f.

ii) Να βρεθεί το εμβαδό E(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση (c) της f και τις ευθείες $y = x$, $x = 1$, $x = \lambda$ $(\lambda > 1)$.

iii) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

44. Δίνεται η συνάρτηση

$f_{\alpha,b}(x) = e^{\alpha x} - e^{bx}$ και έστω $C_{\alpha,b}$ η γραφική παράσταση.

i) Τι σχέση έχουν μεταξύ τους οι γραφικές παραστάσεις $C_{\alpha,b}$ και $C_{-\alpha,-b}$ των συναρτήσεων $f_{\alpha,b}$ και $f_{-\alpha,-b}$.

ii) Αν $0 < \alpha < b$, να μελετηθεί η $f_{\alpha,b}$ και να παρασταθεί γραφικά για $\alpha = 1$ και $b = 4$.

iii) Να βρεθεί το εμβαδό E_λ του χωρίου που περικλείεται από την $C_{\alpha,b}$, τους άξονες Ox και Oy και την ευθεία $x = -\lambda$ $(\lambda > 0)$. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda$.

45. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{3}{9x^2 - 3x - 2}, \quad x > 1$$

i) Να παρασταθεί γραφικά η f.

ii) Να βρεθούν τα όρια:

$$L_1 = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{k=1}^{\nu} f(k), \quad L_2 = \lim_{A \to \infty} \int_1^A f(x)\,dx$$

iii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο με τετμημένη $x = 1$ και τις ευθείες $x = 1$ και $y = 0$.

46. Έστω $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + 3x + 1$, $\alpha \in R$, $x \in R$.

i) Να προσδιοριστεί η πραγματική παράμετρος α έτσι ώστε: $P'(1) = 12$.

ii) Για $\alpha = 3$, να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f : R \setminus \{-1\}$, με $f(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$

iii) Για $\alpha = 3$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_2 \frac{P(x)}{P'(x)}\,dx$$

47. Έστω $P(x) = x^3 - 3x + 2$, $x \in R$

i) Να λυθεί η εξίσωση $P'(x) = 0$

ii) Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση με $f(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$, $x > 1$

iii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα.

$$I = \int_2^3 \frac{P(x)P''(x) - [P'(x)]^2}{[P(x)]^2}\,dx$$

48. Εστω η συνάρτηση

$$f(x) = (x^2 + 4x + m)\, e^x,$$

οπου το m είναι μια πραγματικη περίμετρος.

i) Να βρείτε το m, ωστε η f να εχει ακρότατα.

ii) Για m = 4 να μελετηθει και να παρασταθει γραφικά η f.

iii) Για m = 4 να βρεθει το εμβαδό του χωριου που περικλείεται από τις γραφικες παραστάσεις της f(x) και της $g(x) = e^x$ και τις ευθειες x = 2 και x = 3.

49. Εστω η συναρτηση $f : R \setminus \{2\} \to R$, με

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + m}{2x - 4},\ m \in R.$$

i) Να προσδιοριστει το m έτσι ώστε η f να εχει ακροτατο στο σημειο x = 1.

ii) Για m = 9, να μελετηθεί και να παρασταθει γραφικά η f.

iii) Για m = 9, να βρεθει το εμαβδό του χωριου, που περικλείεται απο τη γραφικη παρασταση της f, την πλάγια ασύμπτωτη και τις ευθειες x = 5 και x = 6.

50. i)Να προσδιοριστει α∈R τετοιο,ωστε η γραφικη παρασταση της f, με $f(x) = \frac{x}{\sqrt{\alpha - x^2}}$ να παρουσιαζει καμπή στο σημείο x = 1.

ii) Για α = 1/8 να παρασταθει γραφικα η f.

iii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεου που παραγεται από την περιστροφη της γραφικης παράστασης της f γυρω από τον αξονα x΄x, για x∈ [1, 0].

51. i) Να δείξετε οτι η y συνάρτηση $g(x) = e^x$, μπορει να γραφει σαν άθροισμα δυο συναρτησεων f και φ, οπου η f ειναι αρτια και η φ είναι περιττή.

ii) Να μελετηθούν και να παρασταθουν γραφικα οι συναρτήσεις f και φ.

iii) Να βρεθει το εμβαδό E(λ) του χωρίου που περικλειεται από τις γραφικές παραστασεις των f και φ, του άξονα Oy και την ευθεία x = λ (λ > 0). Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda).$$

52. Έστω η συνάρτηση f, με

$$f(x) = mx - \ln(x^2 + 1),$$

όπου m μια πραγματική παράμετρος.

i) Να βρεθεί το m έτσι, ωστε η f να ειναι φθινουσα στο R.

ii) Για m = 1 να μελετηθει και να παρασταθεί γραφικα η f.

iii) Να βρεθει το εμβαδό του χωρίου που περικλειεται από τη γραφικη παρασταση της f, του άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = 0, όταν m = 1.

Θεωρείστε γνωστό ότι

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \alpha,\ \text{σταθερό}$$

53. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = xe^{|x|}$.

i) Να μελετηθεί και να παρασταθει γραφικά η f.

ii) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από τη περιστροφή της γραφικής παραστασης της f γυρω από τον αξονα x΄x, οταν x∈ [1, 3].

54. Έστω η συνάρτηση με

$$f(x) = \frac{|\ln x|}{x},\ x > 0.$$

i) Να μελετηθει και να παρασταθεί γραφικα η f.

ii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωριου που περικλείεται από τη γραφικη παρασταση της f, τον άξονα Ox και τις ευθειες x = 1/e και x = e.

55. Εστω συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

i) Να δειξετε οτι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R. Να μελετηθει η μεταβολή της f.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

iii) Για x ≥ 1 να συγκριθούν τα ολοκληρώματα: $\int_1^x e^{t^2}\,dt$ και $\int_1^x e^t\,dt$.

Να βρεθεί $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

56. Έστω η συνάρτηση f με

$$h(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}, \ x \neq 0.$$

i) Να βρεθούν τα όρια:

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ και

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

ii) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f. Να γράψετε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο O.

iii) Έστω Δ το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον ημιάξονα Ox΄ (x < 0). Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox΄, του χωρίου Δ.

57. Έστω συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{\alpha x^2}{x+b}, \text{ όταν } \alpha>0 \text{ και } b>0.$$

i) Να προσδιοριστούν οι α και b έτσι, ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει μια ασύμπτωτη παράλληλη παράλληλη προς την πρώτη διχοτόμο της $\widehat{xOy}$ και η απόσταση μεταξύ των ακροτάτων της συνάρτησης να είναι $\sqrt{20}$.

ii) Για α =1 και b = 1, να παρασταθεί γραφικά η f.

iii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = 4.

58. Έστω f : με $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού αυτής και να δειχθεί ότι η f είναι περιττή.

ii) Να μελετηθεί η μεταβολή της f και να δειχθεί ότι $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

iii) Έστω η συνάρτηση g
$g(x) = 2[(x-1)\ln|x-1| + (x+1)\ln|x+1|]$.
Να δείξετε ότι g΄=f και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$E(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x)\,dx, \text{ όπου } \lambda \in (-1, 0].$$

59. Έστω η συνάρτηση f : με

$$f(x) = x(1 - e^{-x}).$$

i) Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ii) Να βρεθεί η παράγωγος της f.

iii) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η f.

iv) Να βρεθεί μια αρχική συνάρτηση της f.

v) Να βρεθεί το εμβαδό E(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ασύμπτωτή της και τις ευθείες x = 0 και x = λ>0.

vi) Να βρεθεί το όριο: $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

60. Έστω h : με $h(x) = \int_x^{3x} \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}\,dt$.

i) Να δείξετε ότι η h ορίζεται στο R^*.

ii) Να διαπιστώσετε αν η h είναι άρτια ή περιττή.

iii) Έστω $x \in R^*_+$.

1) Να δείξετε ότι υπάρχουν m_x και M_x πραγματικοί τέτοιοι, ώστε :

συν ([x, 3x]) = $[m_x, M_x]$.

2) Να δείξετε ότι: $m_x \ln 3 \leq h(x) \leq M_x \ln 3$

3) Για κάθε x∈ (0, π/ 3] να εκφράσετε τους m_x και M_x ως συνάρτηση του x.

4) Να μελετήσετε το όριο: $\lim_{x \to 0^+} h(x)$.

iv) Μελετήστε το όριο: $\lim_{x \to 0} h(x)$.

61. Στο επίπεδο xOy θεωρούμε μια καμπύλη (c) που αποτελείται από σημεία που οι συντεταγμένες τους πληρούν τις σχέσεις: $y^2 = x^3$, $0 \le x \le \alpha$ και $y \ge 0$. Έστω Α ένα σημείο της καμπύλης με τετμημένη α και A_1, A_2 οι προβολές του Α στους άξονες Ox και Oy αντιστοίχως.
Έστω Δ_1 το χωρίο που περικλείεται από τη (c) τον άξονα Ox και το AA_1 και Δ_2 το χωρίο που περικλείεται από τη (c), τον Oy και το AA_2.

i) Να βρεθεί ο όγκος V_1 του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα xx΄ του Δ_1.

ii) Να βρεθεί ο όγκος V_2 του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον άξονα yy΄ του Δ_2.

iii) Για ποια τιμή του α, ισχύει : $V_1 = V_2$.

62. Δίνεται η συνάρτηση

h : με $h(x) = (x - 1)\, e^{-x}$.

i) Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{x \to -\infty} h(x)$, $\lim_{x \to +\infty} h(x)$

ii) Να βρεθεί η παράγωγος της h και να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η h.

iii) Να παρασταθεί γραφικά η h.

iv) Να βρεθεί μια αρχική συνάρτηση της h.

v) Να βρεθεί το εμβαδό Ε(u) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h, του άξονα Ox και τις ευθείες $x = 1$ και $x = u$, όπου $u > 1$.

vi) Να βρεθεί το όριο: $\lim_{u \to \infty} E(u)$

vii) Να δειχθεί ότι:

$h^{(\nu)}(x) = (-1)^{\nu} e^{-x} (x - \nu - 1)$.

63. i) Έστω $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Υπολογίστε την εφθ σε σχέση με την εφ$\frac{\theta}{2}$.

ii) Να δείξετε ότι: $\text{εφ}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ και

$$\text{εφ}\frac{\pi}{24} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}.$$

iii) Έστω F : με $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η F είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τη F΄.

iv) Έστω $G : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, με

$$G(x) = \int_0^{\text{εφ}x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Να δείξετε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και να βρείτε τη G΄.

v) Έστω $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι για κάθε $t \in [0, \alpha]$, ισχύει:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{1+t^2} \le 1 - t^2 + \frac{t^3}{2}$$

vi) Να δείξετε ότι:

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \le \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+t^2}\,dt \le \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^4}{8}$$

64. Έστω η συνάρτηση h_ν, με

$$h_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu^2 x}{\ln\nu}, & \text{αν } x \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right] \\ \dfrac{1}{x\ln\nu}, & \text{αν } x \in \left[\frac{1}{\nu}, 1\right] \end{cases},$$

$\nu \ge 2$, $\nu \in \mathbb{N}$.

i) Να δείξετε ότι η h_ν είναι συνεχής στο [0, 1] και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 h_\nu(x)\,dx.$$

ii) Έστω h : με $h(x) = \lim_{\nu \to \infty} h_\nu(x)$, $x \in [0,1]$

Να εκφράσετε τη h ως συνάρτηση του x. Είναι η h συνεχής στο [0, 1];

iii) Να συγκριθούν τα :

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^1 h_\nu(x)\,dx \quad \text{και} \quad \int_0^1 \lim_{\nu \to \infty} h_\nu(x)\,dx$$

Τι συμπέρασμα προκύπτει;

65. Έστω $\alpha, b \in R$ με $\alpha < b$ και h μια συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, b]$ που πληρεί τη σχέση:

$h(\alpha + b - x) = -h(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, b]$.

i) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :

$$\int_{\alpha}^{b} h(x)\,dx$$

ii) Χρησιμοποιώντας τη (i) να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_{0}^{\pi} \text{συν}^{2\rho+1}x\,dx \text{ , όπου } \rho \in N.$$

66. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h, k με

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = x + \sqrt{x^2+1}$,

$h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ και $g(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

Έστω $I_\nu = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{x^\nu}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, $\nu \in N$

$F = \displaystyle\int_0^{\alpha} \sqrt{x^2+1}\,dx$, $G = \displaystyle\int_0^{\alpha} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx$

και $H = \displaystyle\int_0^{\alpha} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx$, $\alpha \in R$.

i) Να δειξετε ότι οι f, g, h, k είναι παραγωγίσιμες στο R και να βρεθούν οι παράγωγοί τους.

ii) Να δείξετε ότι το I_ν υπάρχει για κάθε $\nu \in N$ και να υπολογιστούν τα I_0 και I_1.

iii) Δικαιολογήστε την ύπαρξη του G και να βρεθεί το G.

iv) Να αποδείξετε την ύπαρξη του H και να υπολογιστεί

67. Έστω F: με $F(x) = \displaystyle\int_1^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$

i) Να δείξετε ότι η F ορίζεται στο $(0, \infty)$.

ii) Να δείξετε ότι η F είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την παράγωγό της.

iii) Να μελετηθεί στο $(0, \infty)$ το πρόσημο της συνάρτησης (F - ln) και να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ και $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας $\alpha > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $t \in [\alpha, \infty)$ να είναι $\frac{e^t}{t} \geq t$

Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [\alpha, \infty)$ έχουμε

v) Να μελετηθεί η μεταβολή της F και να παρασταθεί γραφικά η F.

$$F(x) \geq F(\alpha) + \frac{x^2 - \alpha^2}{2}.$$

68. Έστω η συνάρτηση h : με

$$h(x) = \frac{x^2 + \alpha x + b}{x^2 - 6x + c}, \text{ όπου } \alpha, b, c \in R.$$

i) Να προσδιοριστούν οι α, b, c έτσι , ώστε η ευθεία x = 2 να είναι ασύμπτωτη της h και η γραφική παράσταση της h να εφάπτεται του άξονα x΄x στο σημείο με τετμημένη x = 1.

ii) Για $\alpha = -2$, $b = 1$ και $c = 8$ να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η h και να προσδιοριστούν τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της h τέμνει τις ασύμπτωτες.

iii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h και τον άξονα x΄x όταν $x \in [-2, 1] \cup [5/2, 3]$.

69. Έστω η συνάρτηση h : με

$$h(x) = \frac{x^2 + \alpha x + b}{x^2 - 6x + 8}, \text{ όπου } \alpha, b \in R.$$

i) Να προσδιοριστούν οι α και b έτσι, ώστε η γραφική παράσταση της h να εφά -

πτεται του άξονα Ox στο σημείο με τετμημένη $x = 1$.

ii) Για $\alpha = -2$ και $b = 1$ να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η h.

iii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 1$.

70. Έστω η συνάρτηση h: με

$$h(x) = \frac{\alpha x^2 + bx + 2}{x - 1}, \text{ όπου } \alpha, b \in R.$$

i) Να προσδιοριστούν οι αριθμοί α και b, έτσι ώστε η γαρφική παράσταση της h να έχει ως πλάγια ασύμπτωτη τη ευθεία $y = x + 2$.

ii) Για $\alpha = b = 1$ να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η h.

iii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h, την πλάγια ασύμπτωτη και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$.

71. i) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $h_1(x) = \ln(x^2 - 1)$

ii) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $h_2(x) = x\ln(x^2 - 1) - 2x + \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

iii) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h_1, τον άξονα Ox και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.

iv) Να δείξετε ότι η h_1, είναι αντιστρέψιμη στο $(1, \infty)$. Αν η g είναι η αντίστροφη της h_1, στο $(1, \infty)$, να παρασταθεί γραφικά η g στο ίδιο σύστημα αναφοράς με τη h_1.

72. i) Έστω η συνάρτηση

φ : με $\varphi(x) = 2x^2 + 1 - \ln|x|$.

Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η φ. Να δειχθεί ότι $\varphi(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

ii) Αν $h(x) = 2x + \frac{\ln|x|}{x}$, $x \neq 0$, να δειχθεί ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \infty)$. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η h.

iii) Έστω ψ : με $\psi(x) = 2x + \frac{\ln|x|}{x}$, $x > 0$

Να δείξετε ότι η ψ είναι αντιστρέψιμη και να παρασταθούν γραφικά, στο ίδιο σύστημα αναφοράς η ψ και η ψ^{-1}. Να βρεθούν οι $\psi^{-1}(2)$ και $(\psi^{-1})'(2)$.

iv) Να βρεθεί το εμβαδό E, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h και τις ευθείες $y = 2x$, $x = 1$ και $x = \alpha > 1$.

v) Να βρεθεί το εμβαδό E_1 του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της ψ^{-1} και τις ευθείες $y = x/2$, $y = 1$ και $y = \alpha > 1$.

vi) Να βρεθεί το εμβαδό E_2 του χωρίου που περικλέιεται από τη γραφική πράσταση τηε ψ^{-1} και τις ευθείες $y = x/2$, $x = 2$ και $x = h(\alpha)$.

73. Έστω συνάρτηση h : με

$h(x) = e^{\alpha x}(x^2 + \alpha^2)^{-1}$, όπου $\alpha \in R^*$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η h. (διερεύνηση).

ii) Να δείξετε ότι για $\alpha \geq 1$ ισχύει η ανισότητα $e^{\alpha x} > 1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2$, για κάθε $x > 0$.

iii) Αν x_1, x_2 είναι πραγματικές ρίζες της h', να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{\alpha \to 0}\left(\frac{1 + x_1 x_2}{1 - x_1 x_2}\right)^{\frac{(x_1 x_2)^2}{4}}$$

iv) Να βρεθεί μια αρχική συνάρτηση της συνάρτηση $g(x) = (x^2 + \alpha^2)\, h(x)$ ημx.